Modelos Dinamicos para Futuros de Volatilidad (VIX) y Aplicaciones*

Marco Avellaneda

Courant Institute, New York University

Andrew Papanicolaou, NYU Financial Risk Engineering

* Statistics of VIX Futures and Applications to Trading Volatility Exchange-Traded Products (February 24, 2018). *The Journal of Investment Strategies*, Vol. 7, No. 2, pp. 1-33 (2018) . SSRN: https://ssrn.com/abstract=3028910, http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3028910

Wall Street desafió al miedo con algoritmos y lo pagó muy caro

ECONOMÍA 8 FEB, 2018

POR: JOSÉ MIGUEL MORENO
Director de llamadinero.com

Seguir Seguir G+

CIUDAD DE MÉXICO.- El pasado lunes Wall Street sufrió una severa caída, pero lo que llamó la atención fue la velocidad del desplome, en apenas unos minutos.

Es cierto que la caída comenzó el viernes, y las causas están detectadas:

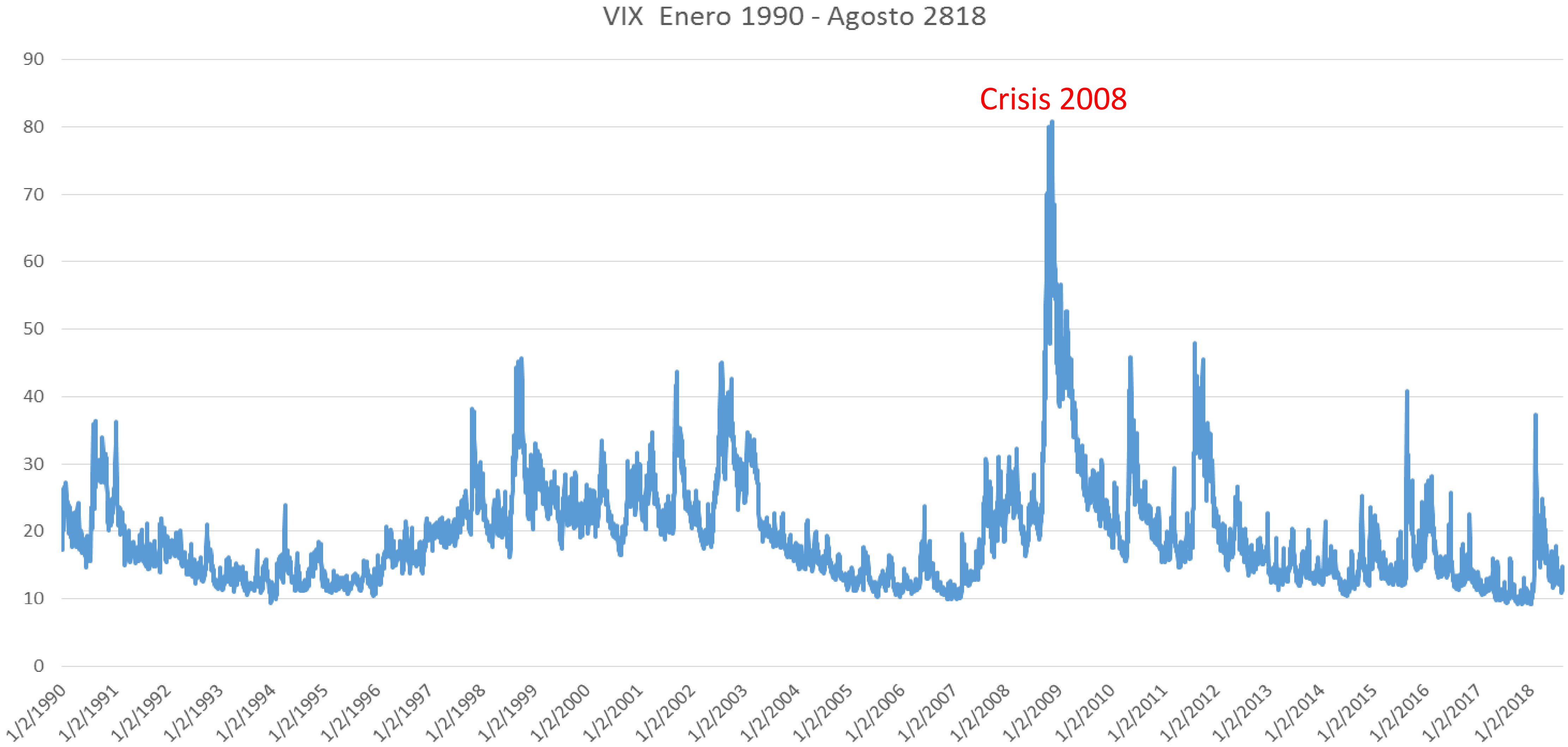
- Los mercados están caros
- La tasa de 10 años está repuntando a gran velocidad
- Se acumulan riesgos inflacionarios
- El recorte de impuestos de Donald Trump traerá más inflación y deuda
- Y la incomodidad que genera entre los inversionistas la llegada a la Fed de un tipo llamado Jerome Powell, un perfecto desconocido que ni siquiera es economista y que puede ser un títere de Donald Trump.

VIX= volatilidad implicita de opciones sobre indice S&P500 de corto plazo (1m)

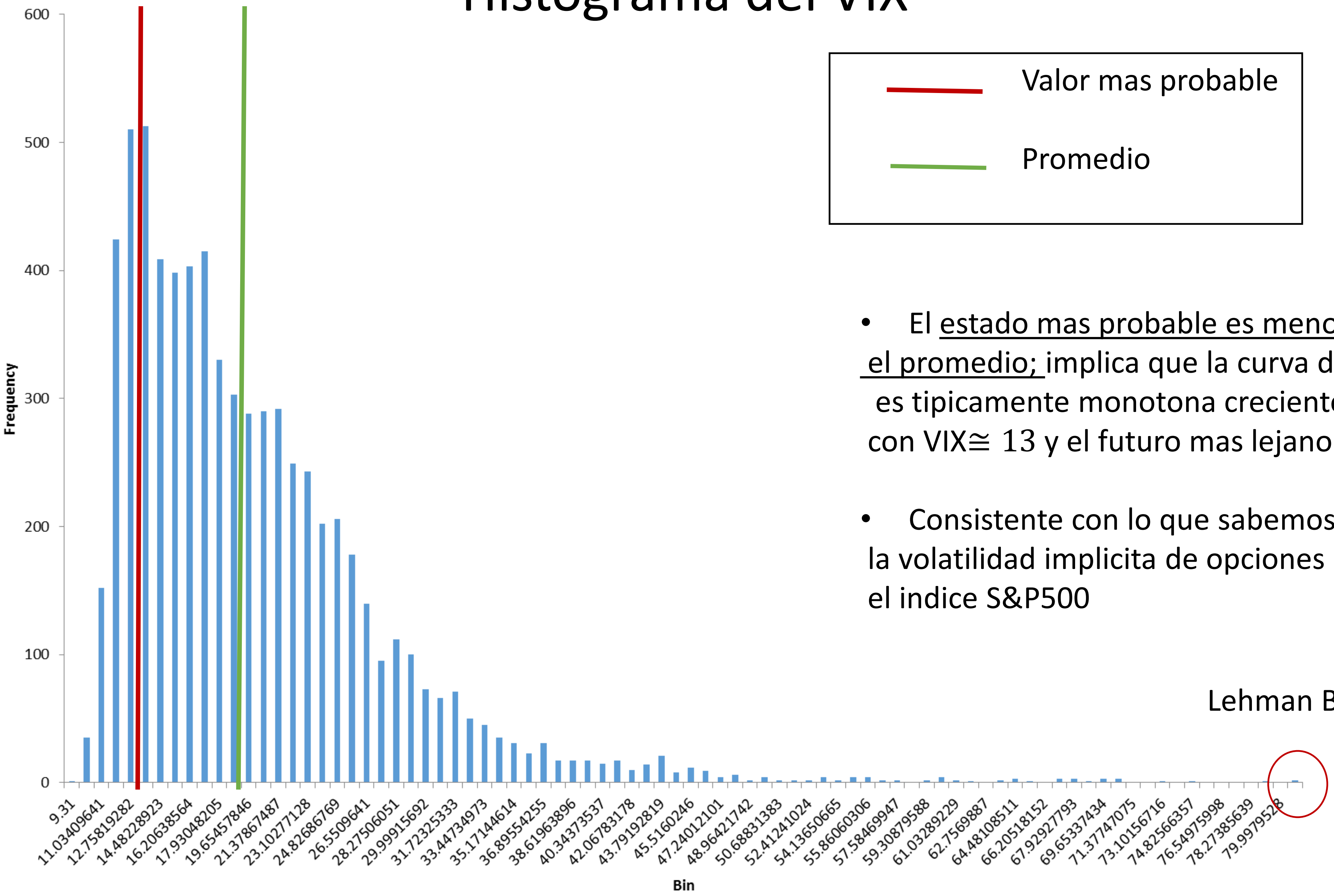
$VIX \cong \sqrt{252} \times$ (cambio porcentual esperado de 1 dia, sobre proximos 30 dias)

$\cong 16 \times$ (cambio porcentual esperado de 1 dia, sobre proximos 30 dias)

VIX es el ``indice del miedo'' de Wall Street



Histograma del VIX



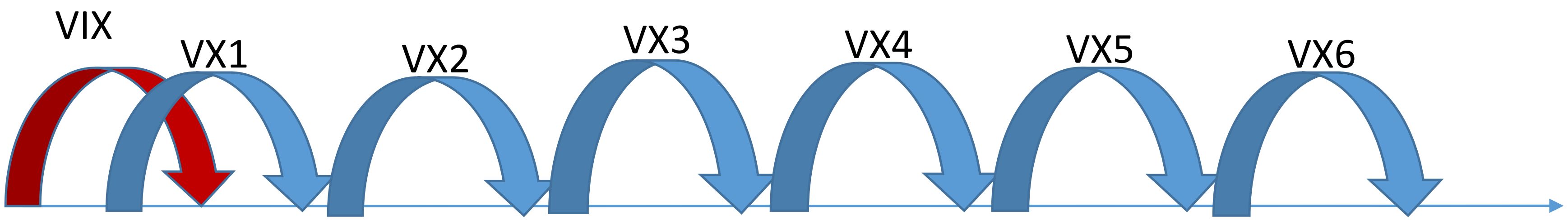
- El estado mas probable es menor que el promedio; implica que la curva de futuros es tipicamente monotona creciente, con VIX$\cong$ 13 y el futuro mas lejano $\cong$ 20

- Consistente con lo que sabemos sobre la volatilidad implicita de opciones sobre el indice S&P500

Lehman Bros

Futuros de VIX (simbolo:VX)

- Valor nocional de un contrato = VX $\times$ 1,000
-
- Variacion de precio = 0.05 (USD 50)
- Precio de liquidacion final = VIX $\times$ 1,000
- Vencimientos mensuales, el Miercoles precedente al 3er Viernes
- Mercado: Chicago Futures Exchange (CBOE)
- Liquidacion en efectivo



- Cada futuro corresponde al ``costo de proteccion'' por los 30 dias que siguen a la fecha de vencimiento
- Vencimientos separados por un mes.
- Recientemente, se crearon contratos futuros con vencimientos semanales, el los primeros 2 meses

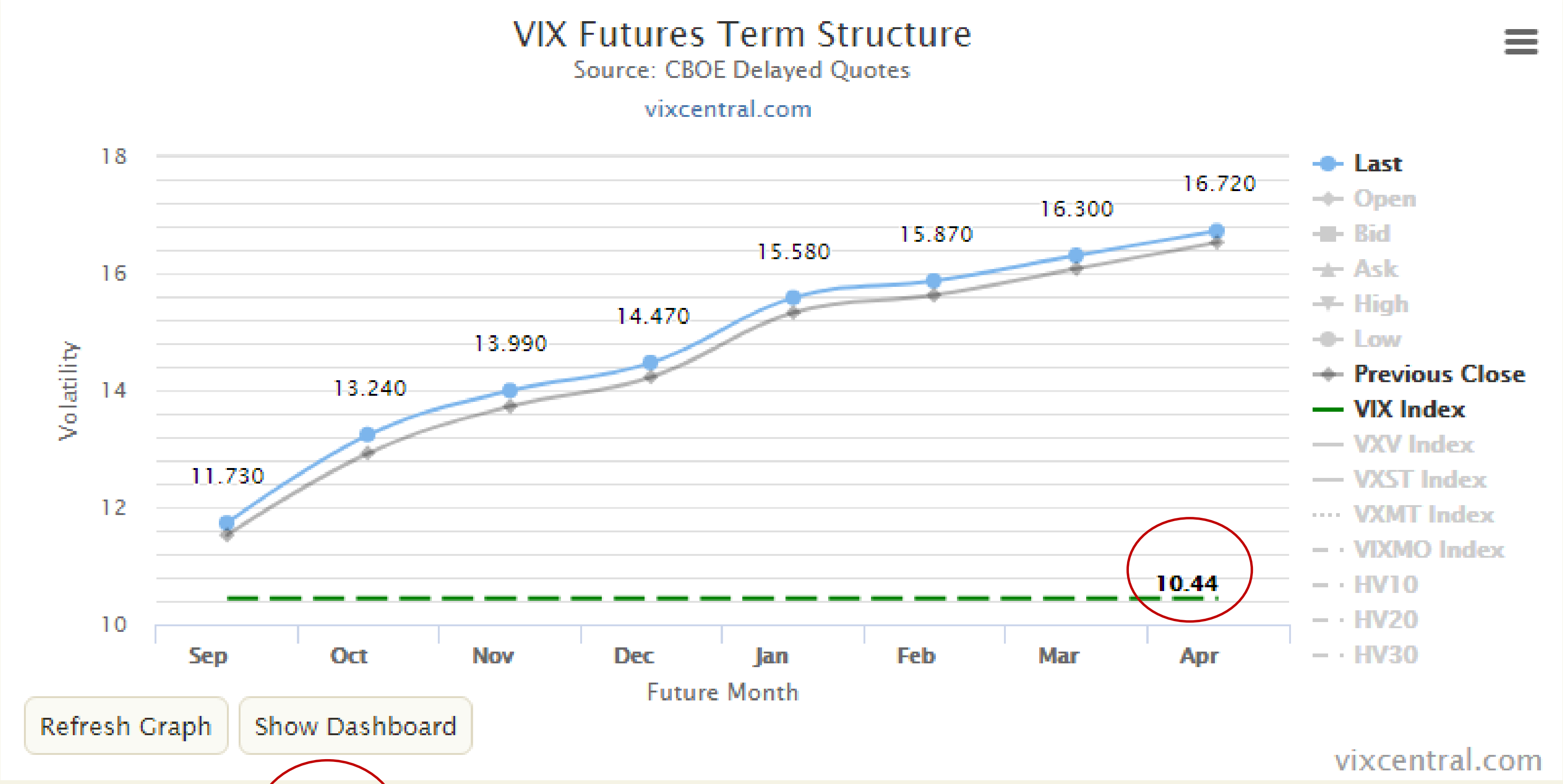
VIX Central

Questions and Feedback

Follow @VixCentral

VIX futures 6:30 PM
Thursday Sep 14, 2017

VIX Term Months | VIX Term All | Historical Prices | Contango | Help | Blogroll



% Contango	1	12.87%	2	5.66%	3	3.43%	4	7.67%	5	1.86%	6	2.71%	7	2.58%	8
Difference	1	1.51	2	0.75	3	0.48	4	1.11	5	0.29	6	0.43	7	0.42	8

Month 7 to 4 contango	12.65%	4.22%

Fechas de vencimiento:

Sep 20, 2017

Oct 18, 2017

Nov 17, 2017

Dec 19, 2017

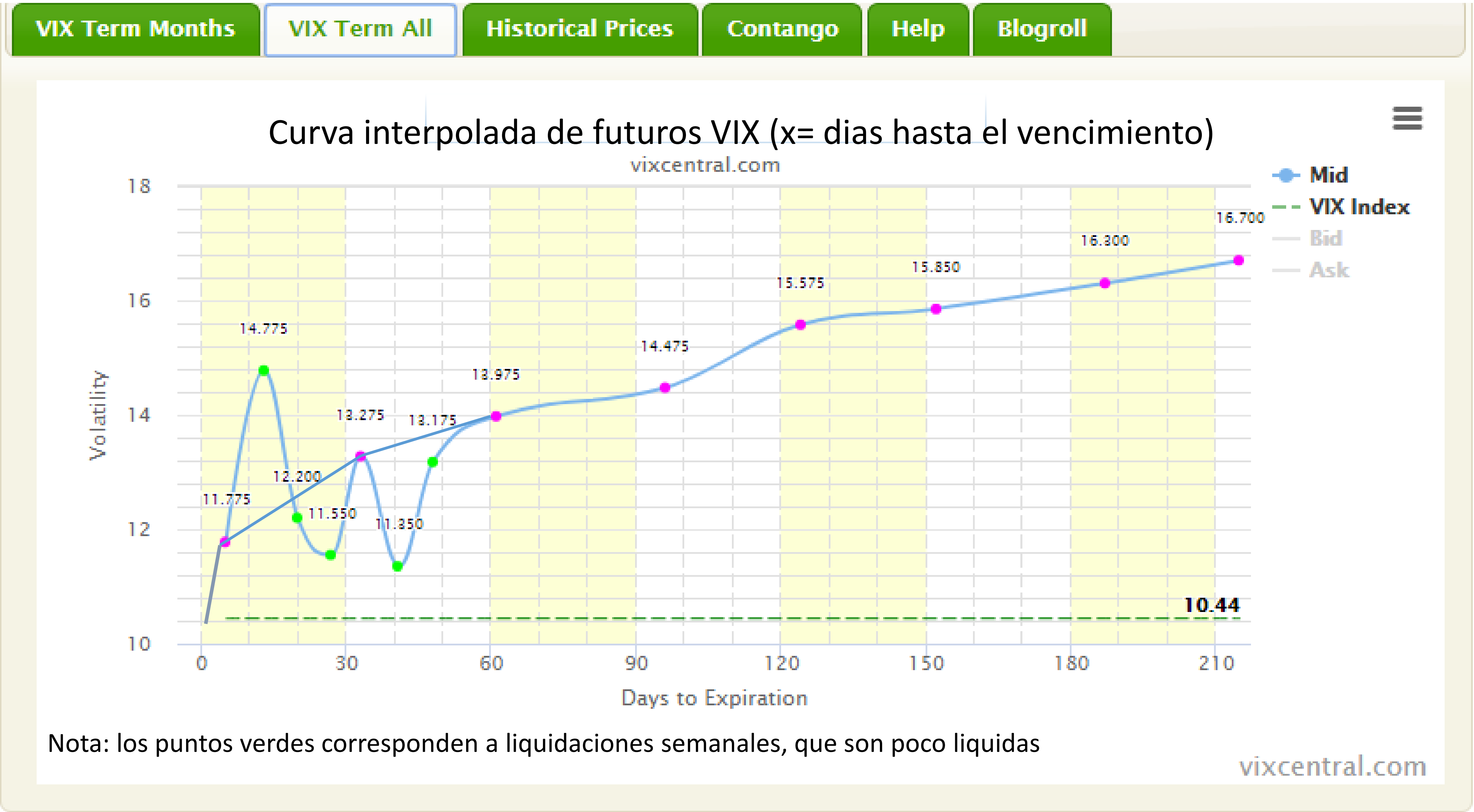
Jan 16, 2018

Feb 13, 2018

Mar 20, 2018

April 17, 2018

Curva interpolada de futuros VIX (x= dias hasta el vencimiento)



Nota: los puntos verdes corresponden a liquidaciones semanales, que son poco liquidas

El ciclo de futuros VIX

1. Mercados calmos, la curva es creciente y convexa: contango

2. Surge la posibilidad de (o se presenta) una crisis -- los precios de opciones S&P suben (``risk-off'')

3. VIX sube, la curva se levanta, doblandose en el frente, eventualmente entrando en backwardation

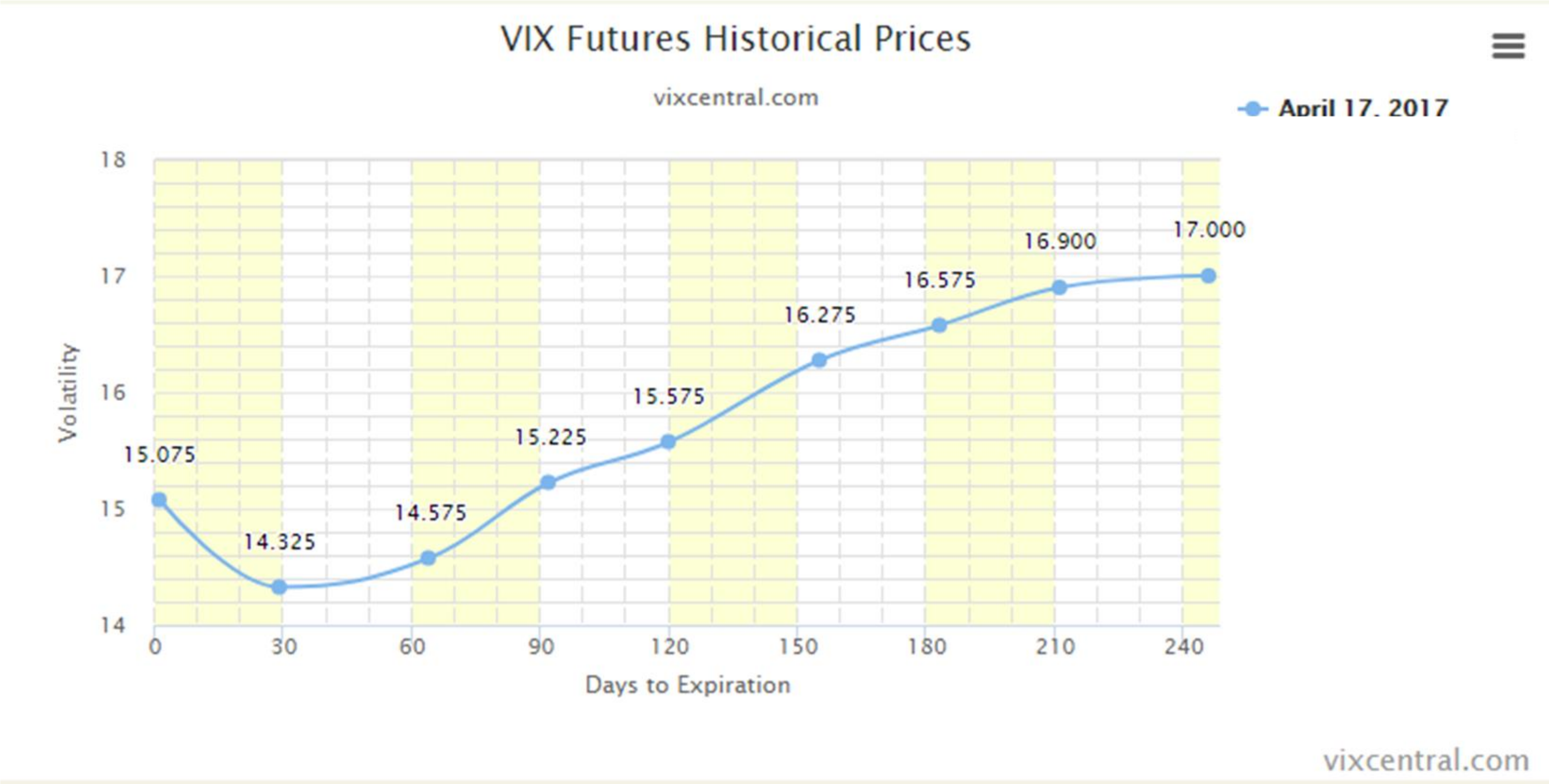
4. Valores de las acciones caen

5. La backwardation es tipicamente parcial pero puedeser total, en casos extremos

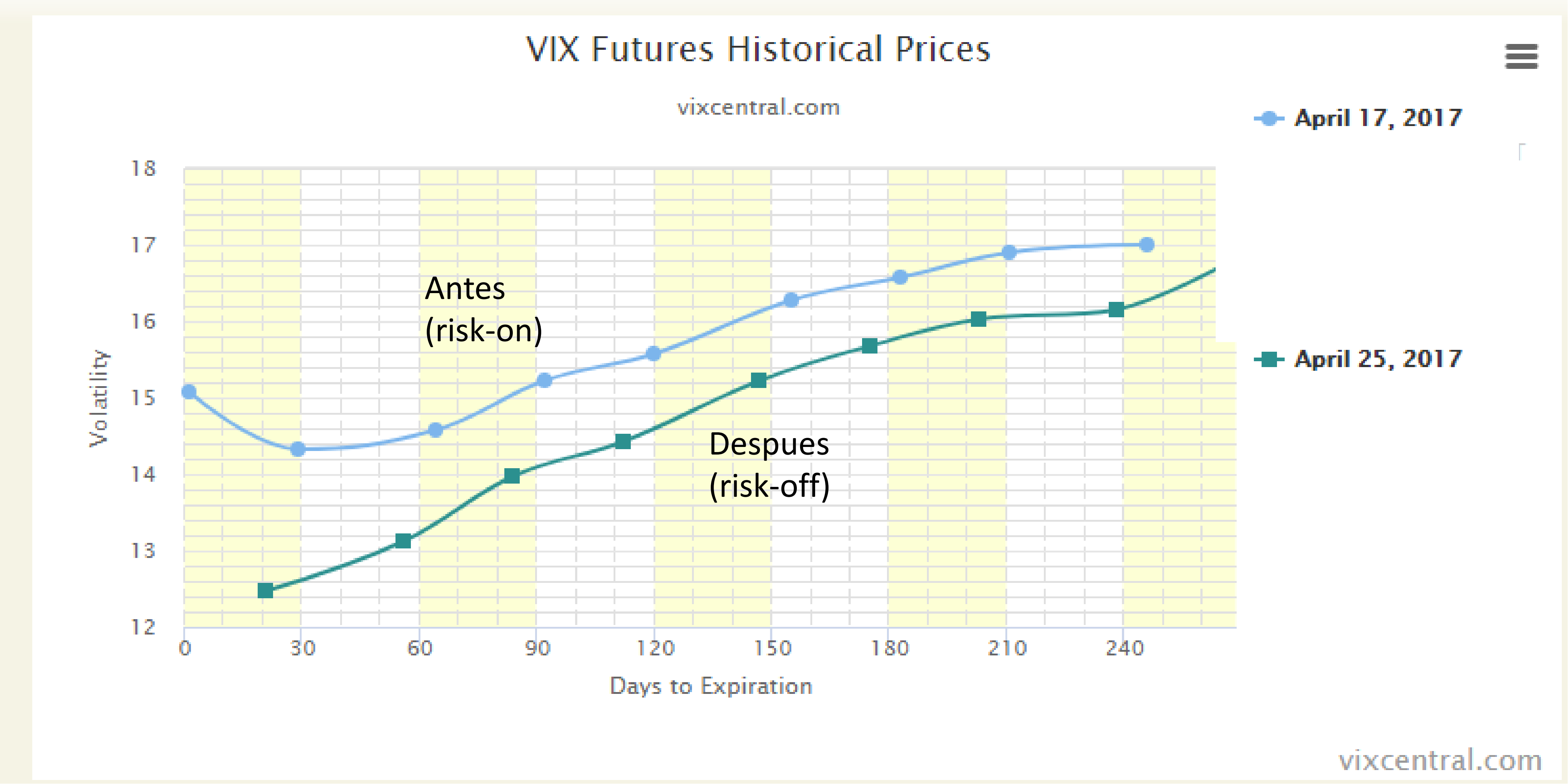
6. La incertidumbre se resuelve, las acciones empiezan a subir, la curva de VIX cae y retoma su forma creciente (risk-on)

7. El estado mas probable retorna (volatilidad baja, curva creciente y concava)

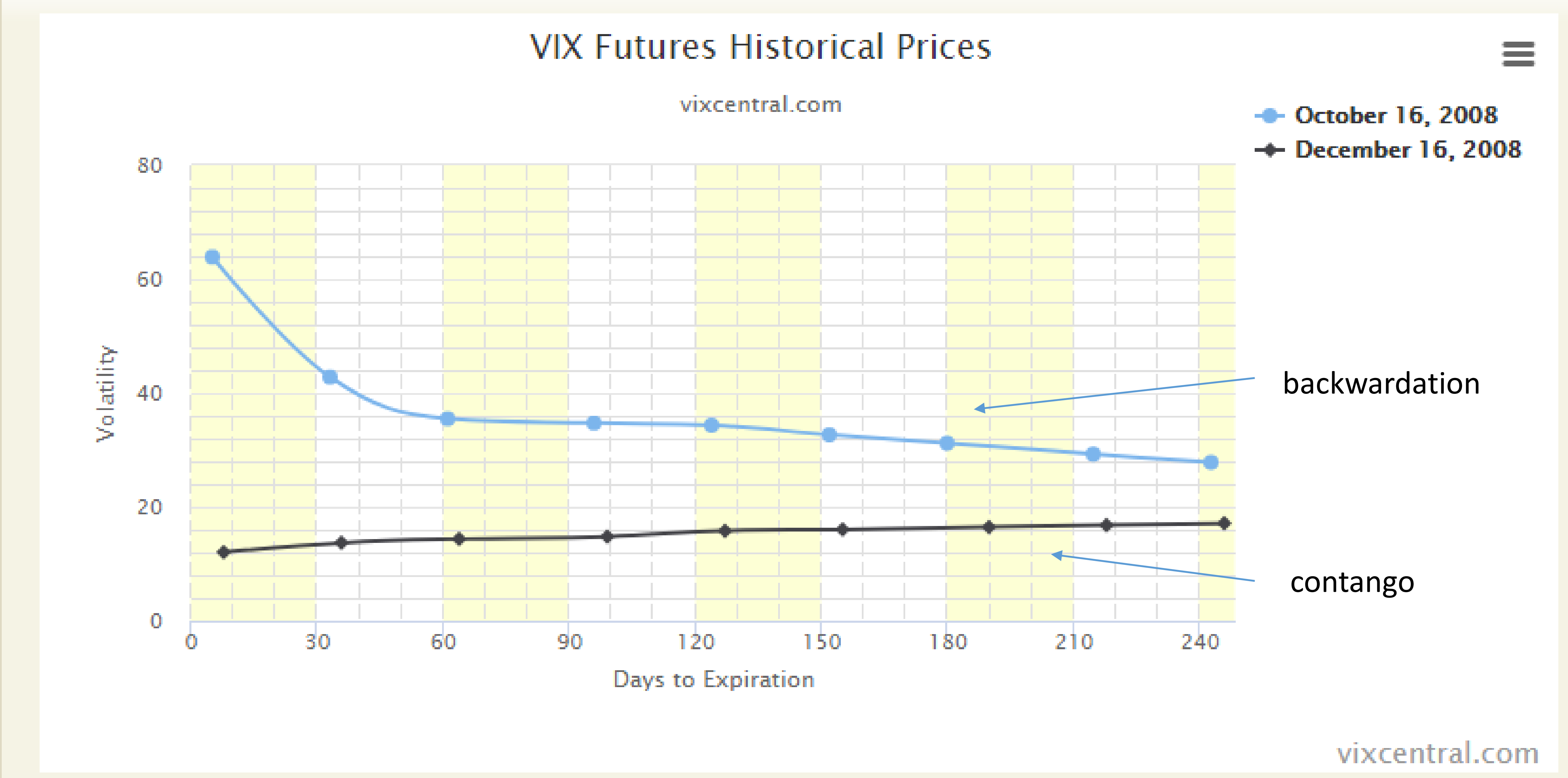
Backwardation parcial: Elecciones presidenciales Francesas, 1er turno



Curvas antes y despues de las elecciones francesas



Semana de la quiebra de Lehman Brothers y 2 meses despues

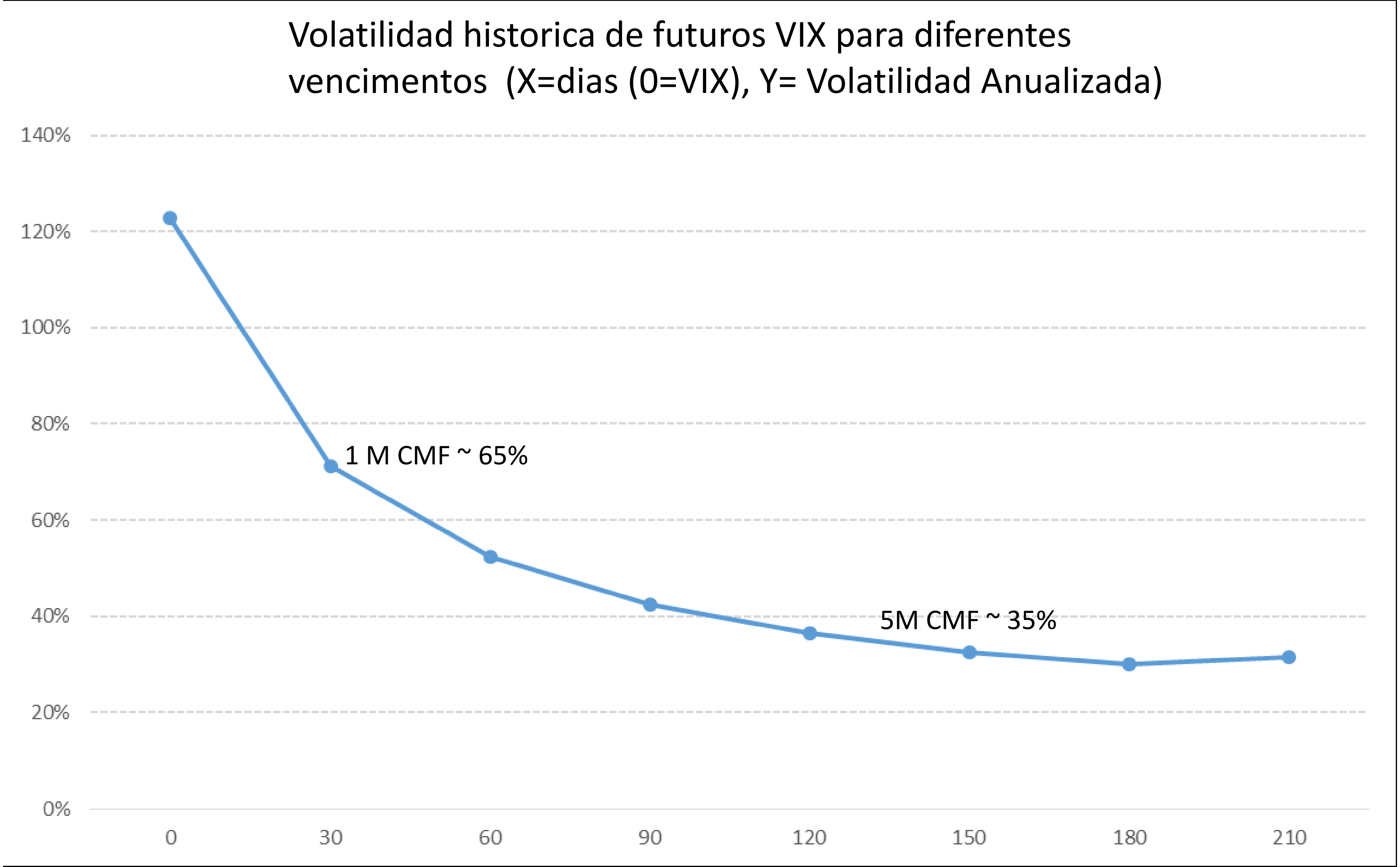


Analisis estadistico de Futuros VIX

- Curva de futuros con ``vencimiento diario'', V^{τ}, usando interpolacion

$$V_t^{\tau} = \frac{\tau_{k+1} - \tau}{\tau_{k+1} - \tau_k} VX_k(t) + \frac{\tau - \tau_k}{\tau_{k+1} - \tau_k} VX_{k+1}(t)$$

VX_k(t)= futuro del mes k en la fecha t, $VX_0 =$ VIX, $\tau_0 = 0$, $\tau_k =$ dias hasta el vencimiento del futuro k


Volatilidad historica de futuros VIX para diferentes vencimentos (X=dias (0=VIX), Y= Volatilidad Anualizada)
140%
120%
100%
80%
60%
40%
20%
0%
0
30
60
90
120
150
180
210
1 M CMF ~ 65%
5M CMF ~ 35%

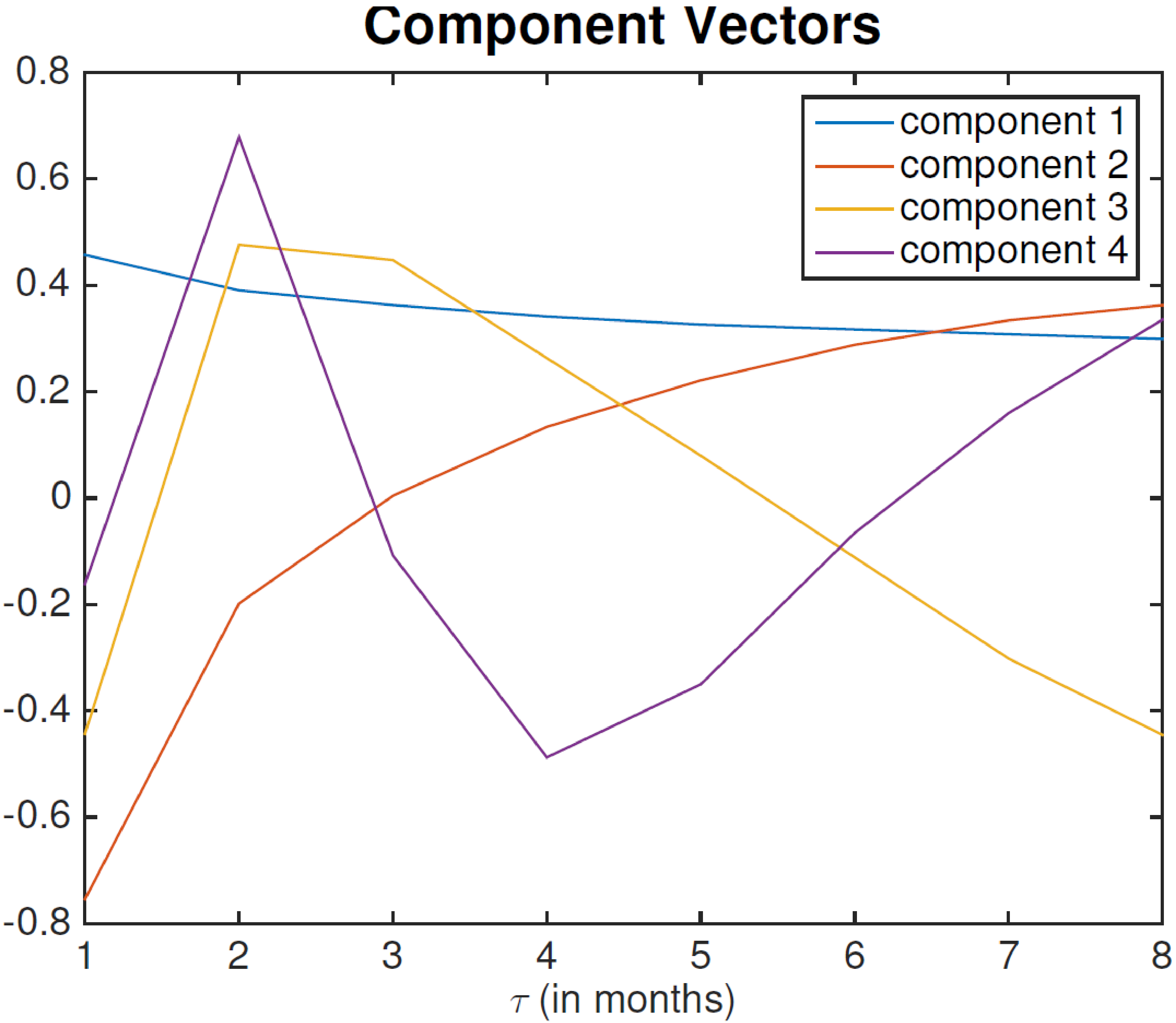
Analisis de components principales (ACP)

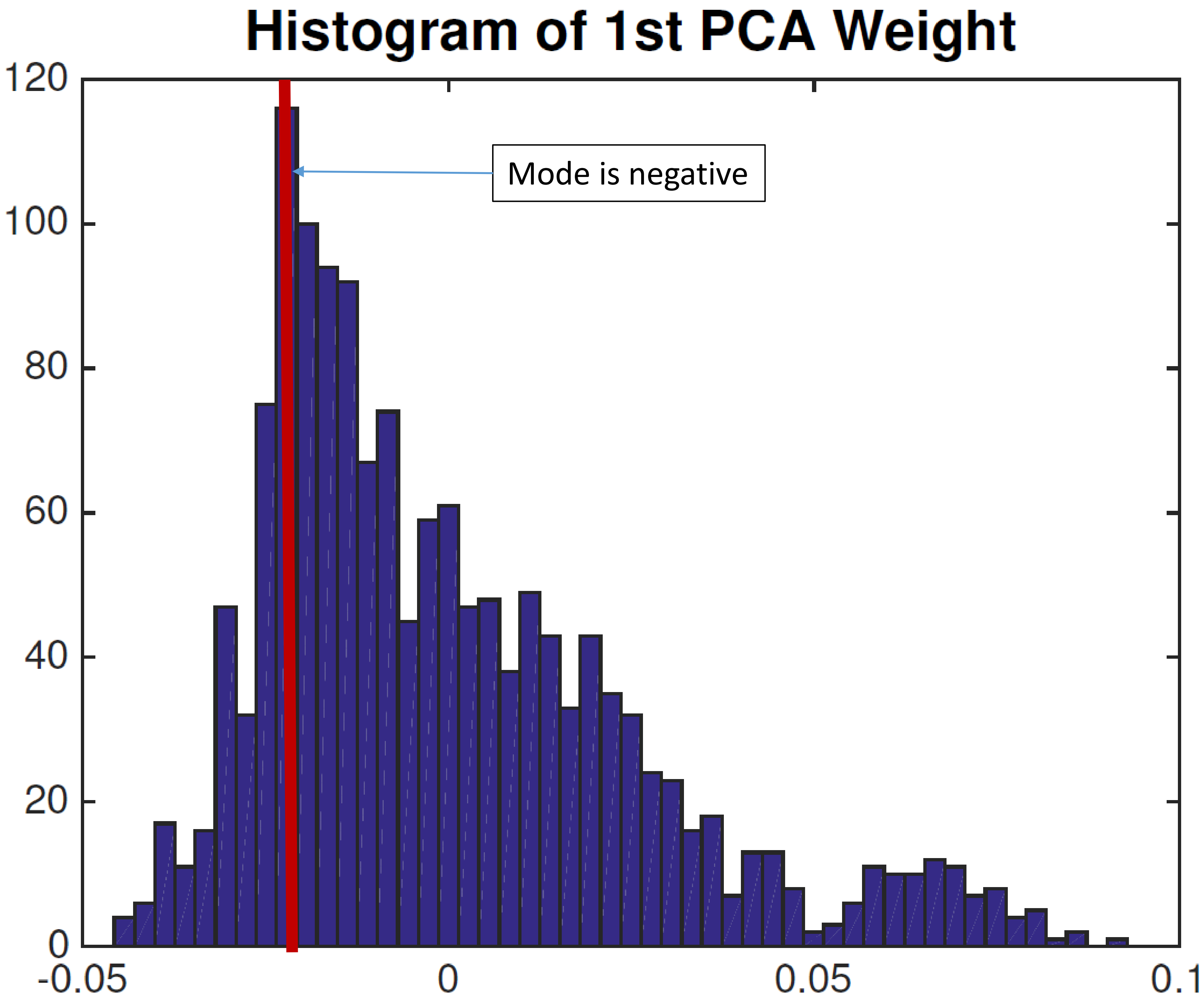
- Vencimientos $\tau_k, \quad k = 0, 30, 60, 90, 120,150, 180, 210$
- Fechas: Feb 8 2011 al Dec 15 2016

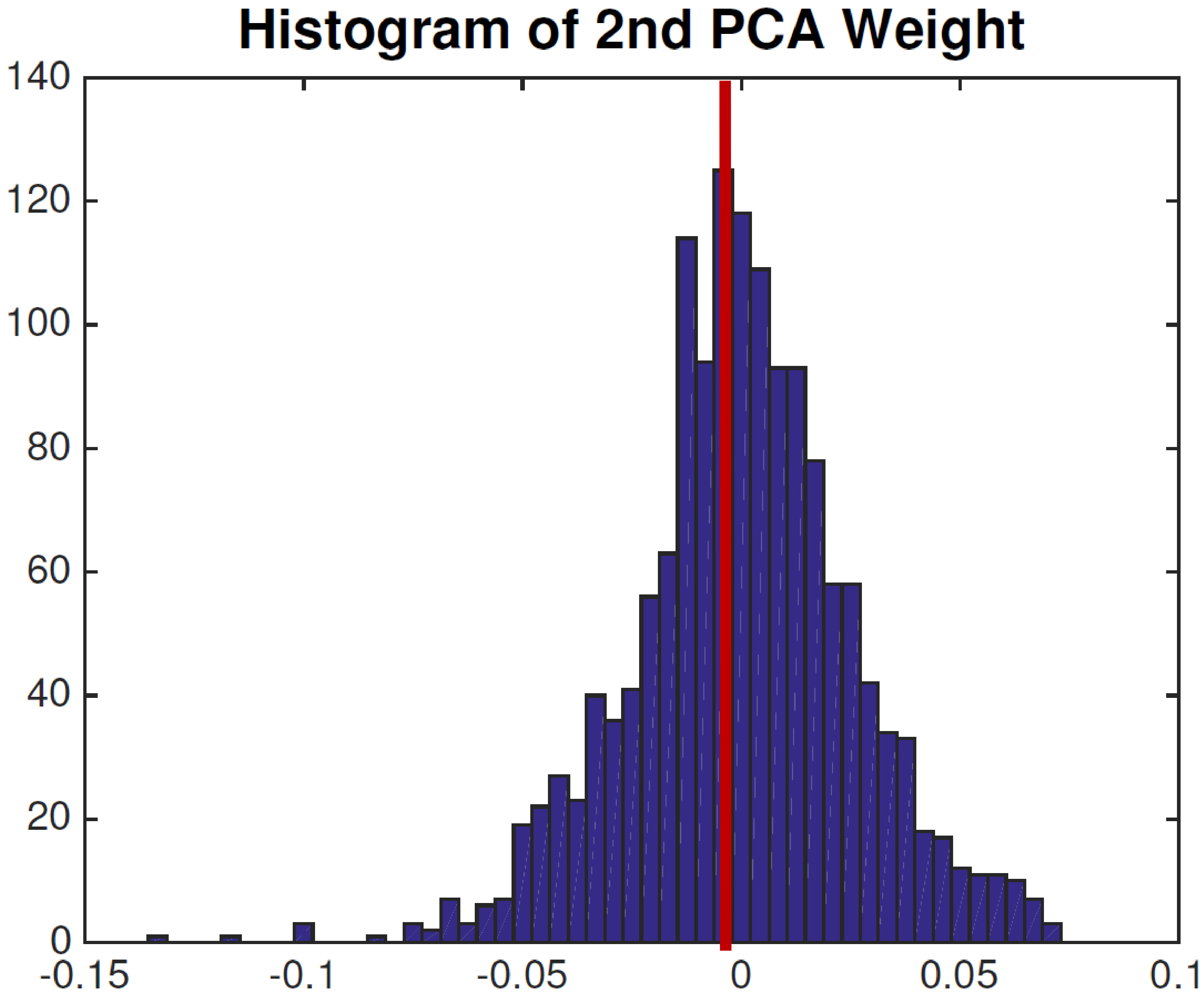
$$lnV_{t_i}^{\tau_k} = \quad \overline{lnV^{\tau_k}} + \sum_{l=1}^{8} a_{il}\Psi_l^k$$

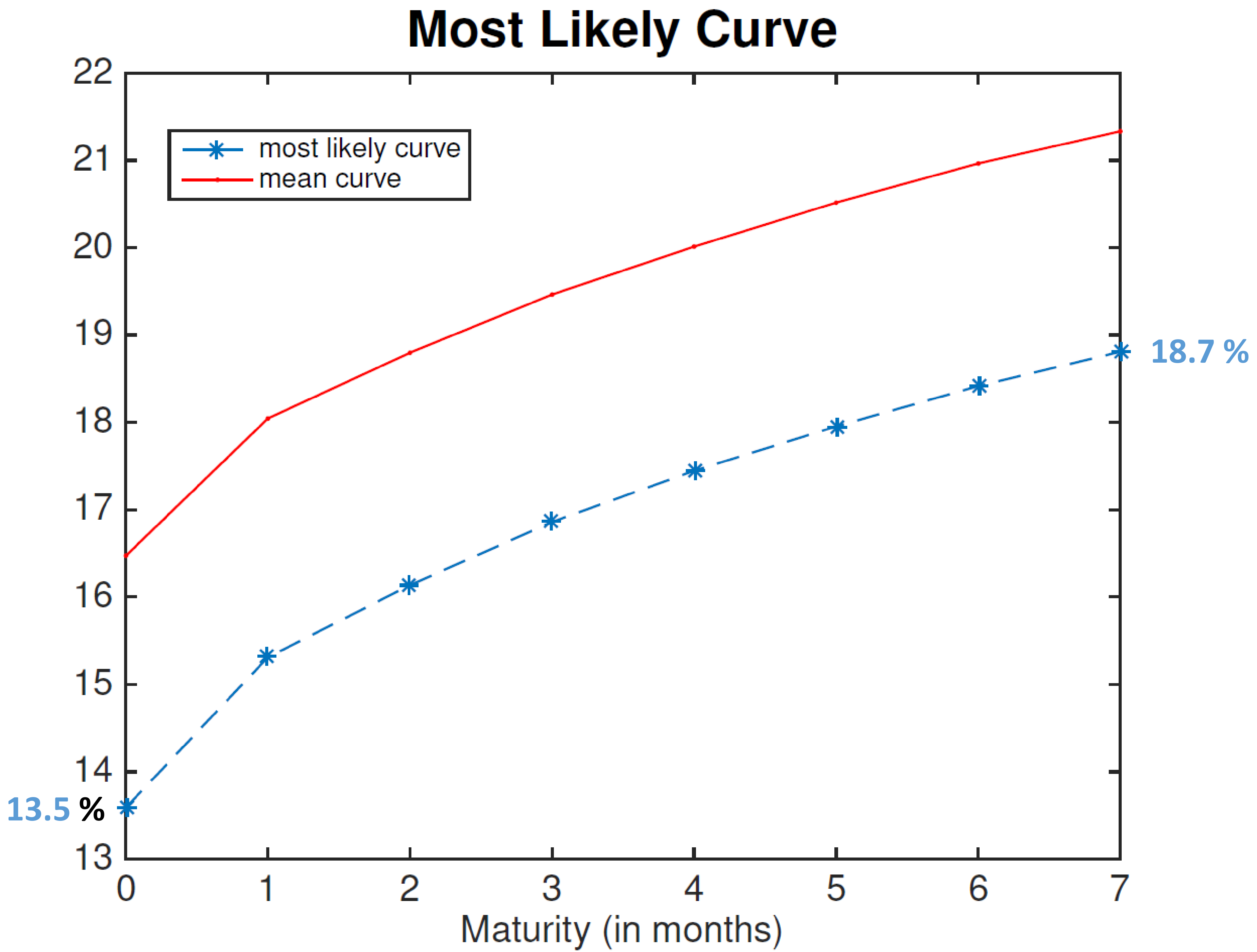
- Ver Alexander y Korovilas (2010)

Eigenvalue	% variance expl
1	72
2	18
3	6
4	1
5 to 8	<1


Component Vectors
component 1
component 2
component 3
component 4
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
1
2
3
4
5
6
7
8
τ (in months)

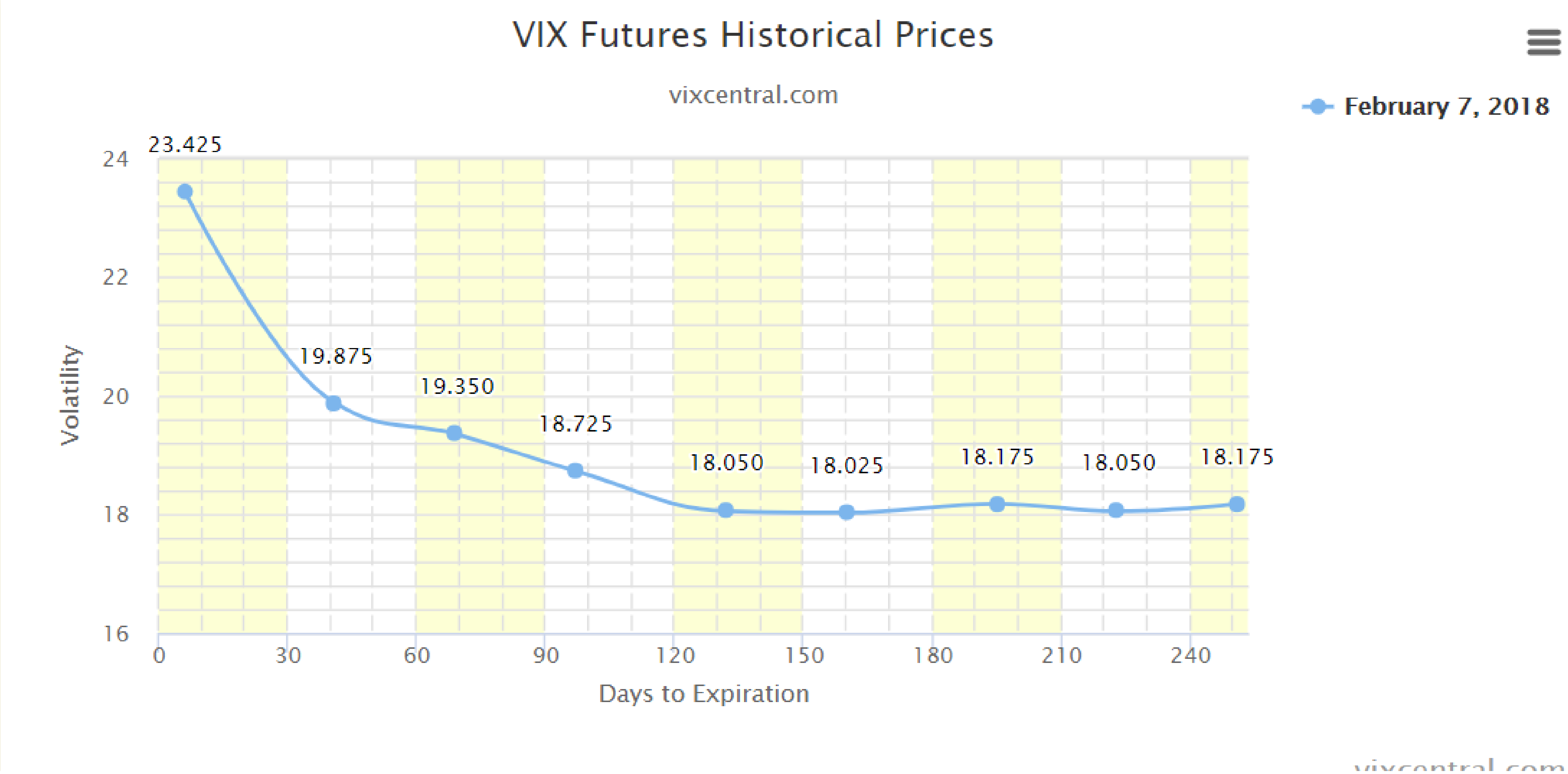

Histogram of 1st PCA Weight
Mode is negative
120
100
80
60
40
20
0
-0.05
0
0.05
0.1


Histogram of 2nd PCA Weight
140
120
100
80
60
40
20
0
-0.15
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1

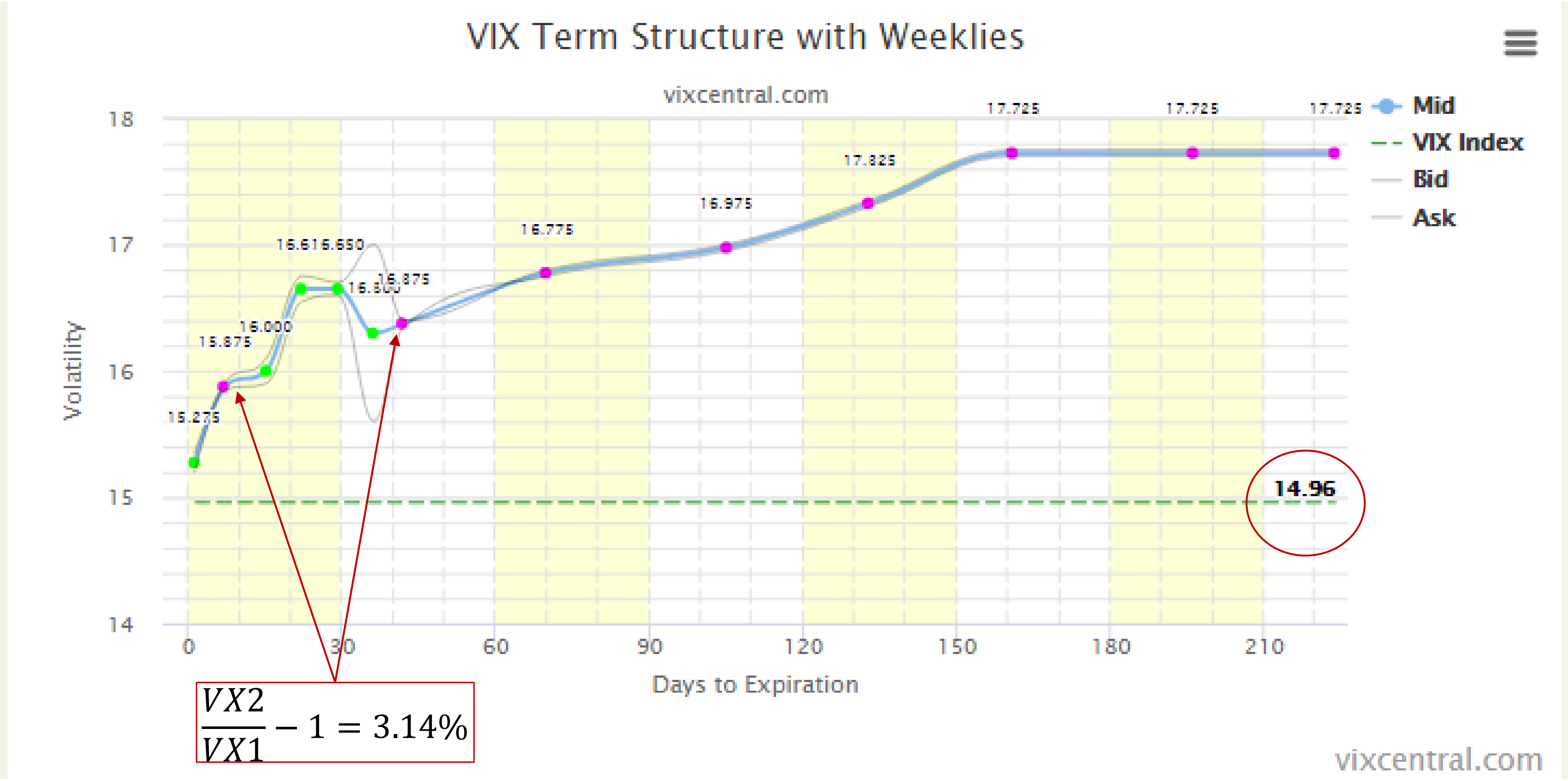


Most Likely Curve
most likely curve
mean curve
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
0
1
2
3
4
5
6
7
Maturity (in months)
13.5 %
18.7 %

Curva invertida en 7 de Febrero 2018, VIX=37



Futuros VIX, 8 de Mayo, 2018



$$\frac{VX2}{VX1} - 1 = 3.14\%$$

ETFs (fondos de indices) sobre futuros de VIX (VXX, XIV,VXZ, ZIV)

- Fondo invierte en una cartera de futuros

$$\frac{dI}{I} = r\,dt + \sum_{i=1}^{N} a_i\,\frac{dF_i}{F_i} \qquad\qquad a_i = \text{fraccion (\%)de activos en iesimo futuro}$$

- Normalizacion de las fracciones:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \beta, \qquad\qquad \beta = \text{coeficiente de apalancamiento}$$

En general se fija el vencimiento promedio de los futuros en el fondo

- Con $\beta = 1$, sea b_i= **fraccion del numero de contratos** invertido en i^{esimo} futuro:

$$b_i = \frac{n_i}{\sum n_j} = \frac{I\ a_i}{F_i}.$$

- Fijar el vencimiento impone una restriccion adicional sobre las fracciones:

$$\theta = \sum_{i=1}^{N} b_i\,(T_i - t) = \sum_{i=1}^{N} b_i \tau_i.$$

Ejemplo: VXX (vencimiento = 1M, comprado futuros, ajuste diario)

$$\frac{dI}{I} = rdt + \frac{b(t)dF_1 + (1-b(t))dF_2}{b(t)F_1 + (1-b(t))F_2}$$

Pesos baseados en 1-M, sin apalancamiento.

$$b(t) = \frac{T_2 - t - \theta}{T_2 - T_1}$$

$$\theta = 1 \text{ es} = 30/360$$

Futuro interpolado $V_t^\theta = b(t)F_1 + (1-b(t))F_2$

Cambio del futuro interpolado (1 dia) $dV_t^\theta = b(t)dF_1 + (1-b(t))dF_2 + \underline{b'(t)F_1 - b'(t)F_2}$

Variacion del futuro interpolado

$$\frac{dV_t^\theta}{V_t^\theta} = \frac{b(t)dF_1 + (1-b(t))dF_2}{b(t)F_1 + (1-b(t))F_2} + \frac{F_2 - F_1}{b(t)F_1 + (1-b(t))F_2}\frac{dt}{T_2 - T_1}$$

Relacion entre fondos de indice y futuros interpolados (usando VXX como ejemplo)

$$\frac{dI}{I} = rdt + \frac{b(t)dF_1 + (1 - b(t))dF_2}{b(t)F_1 + (1 - b(t))F_2}$$

$$= r\,dt + \frac{dV_t^\theta}{V_t^\theta} - \frac{F_2 - F_1}{b(t)F_1 + (1 - b(t))F_2}\frac{dt}{T_2 - T_1}$$

$$\boxed{\frac{dI}{I} = r\,dt + \frac{dV_t^\theta}{V_t^\theta} - \left.\frac{\partial \ln V_t^\tau}{\partial\,\tau}\right]_{\tau=\theta} dt}$$

La pendiente de la CF indica la diferencia entre el rendimiento del ETF y el rendimiento del futuro 1-mes interpolado.


iPath S&P 500 VIX ST Futures ETN (VXX) 42.82 -0.78 (-1.79%) As of September 15 4:00PM EDT. Market closed.
Add Indicator
Comparison
1d
5d
1m
3m
6m
YTD
1y
2y
5y
10y
Max
Area
Settings
Reset
VXX 5992.96
Open 5478.40
Close 5992.96
Low 5391.36
High 6394.88
Vol 684.80K
% Chg -94.40%
El contango hace que el fondo de indice pierda valor a largo plazo
Flash crash
US Gov downgrade
Feb 2009
125000.00
100000.00
75000.00
50000.00
25000.00
5992.96
20.78M
2011
Jul 25 '11
2013
2015
2017

Modelo log-normal para el VIX

$$VIX_t = exp(X_{1\,t} + X_{2\,t})$$

$$dX_1 = \sigma_1 dW_1 + k_1(\mu_1 - X_1)dt$$

$$dX_2 = \sigma_2 dW_2 + k_2(\mu_2 - X_2)dt$$

$$dW_1\, dW_2 = \rho\, dt$$

X_1 = factor correspondiente a VIX y el nivel general de la curva (lento)

X_2 = factor correspondiente a la pendiente de la curva (rapido)

Se espera correlacion positive entre los factores (ACP).

Modelo de la Curva de Futuros

$$V^{\tau} = E^{Q}\{VIX_{\tau}\} = E^{Q}\{exp(X_{1\,\tau} + X_{2\,\tau})\}$$

Condicion de no-arbitrage entre diferentes futuros, donde Q = ``medida de valorizacion'' incluyendo primas de riesgo

$$V^{\tau} = V^{\infty}\, exp\left[e^{-\bar{k}_1\tau}(X_1 - \bar{\mu}_1) + e^{-\bar{k}_2\tau}(X_2 - \bar{\mu}_2) - \frac{1}{2}\sum_{ji=1}^{2} \frac{e^{-\bar{k}_i\tau} e^{\overline{-k}_j\tau}}{\bar{k}_i + \bar{k}_j}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}\right]$$

`Parametros con barra' corresponden a renormalizacion incluyendo la prima de riesgo.
`Parametros sin barras' corresponden a estimacion historica de VIX.
Estimar el modelo quiere decir hallar $k_1, \mu_1, k_2, \mu_2, \bar{k}_1, \bar{\mu}_1, \bar{k}_2, \bar{\mu}_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho, V^{\infty}$ usando datos historicos de VIX y sus futuros.

Estimacion usando datos 2011-2016 (post 2008)

- <u>Tecnica: filtro de Kalman</u>

Estimated Θ
Input data: 2/2011 to 12/2016, with VIX and CMFs 1m to 7m.

$\bar{\mu}_1$	3.8103	μ_1	3.2957
$\bar{\mu}_2$	-0.7212	μ_2	-0.7588
$\bar{\kappa}_1$	1.1933	κ_1	0.4065
$\bar{\kappa}_2$	10.8757	κ_2	13.1019
σ_1	0.6776		
σ_2	0.8577		
ρ	0.4462		

Estimated Θ
Input data: 2/2011 to 12/2016, with VIX, 3m and 6m CMFs.

$\bar{\mu}_1$	3.8094	μ_1	3.2524
$\bar{\mu}_2$	-0.7100	μ_2	-0.7155
$\bar{\kappa}_1$	1.0215	κ_1	0.3219
$\bar{\kappa}_2$	10.8739	κ_2	13.0799
σ_1	0.5931		
σ_2	0.9066		
ρ	0.4266		

Estimacion usando datos del 2007 al 2016

Estimated Θ
Input data: 7/2007 to 7/2016, with VIX and CMFs 1m to 6m.

$\bar{\mu}_1$	-6.6216	μ_1	-7.1367
$\bar{\mu}_2$	9.7372	μ_2	9.7608
$\bar{\kappa}_1$	0.6543	κ_1	0.2010
$\bar{\kappa}_2$	5.9052	κ_2	5.9389
σ_1	0.5525		
σ_2	0.9802		
ρ	0.6015		

Estimated Θ
Input data: 7/2007 to 7/2016, with VIX, 1m and 6m CMFs.

$\bar{\mu}_1$	2.4581	μ_1	1.8685
$\bar{\mu}_2$	0.8002	μ_2	0.7555
$\bar{\kappa}_1$	0.5505	κ_1	0.1081
$\bar{\kappa}_2$	10.0013	κ_2	12.3600
σ_1	0.4294		
σ_2	0.7998		
ρ	0.5073		

Aplicacion: ecuacion diferencial estocastica para ETFs (e.g. VXX)

$$\frac{dI}{I} = r\,dt + \frac{dV_t^\theta}{V_t^\theta} - \left.\frac{\partial \ln V_t^\tau}{\partial\, \tau}\right]_{\tau=\theta} dt$$

$$\frac{dI}{I} = r\,dt + \sum_{i=1}^{2} e^{-\bar{k}_i\theta}\sigma_i dW_i + \sum_{i=1}^{2} e^{-\bar{k}_i\theta}\left[\,\left(\bar{k}_i - k_i\right)X_i + \left(k_i\mu_i - \bar{k}_i\bar{\mu}_i\right)\right] dt$$

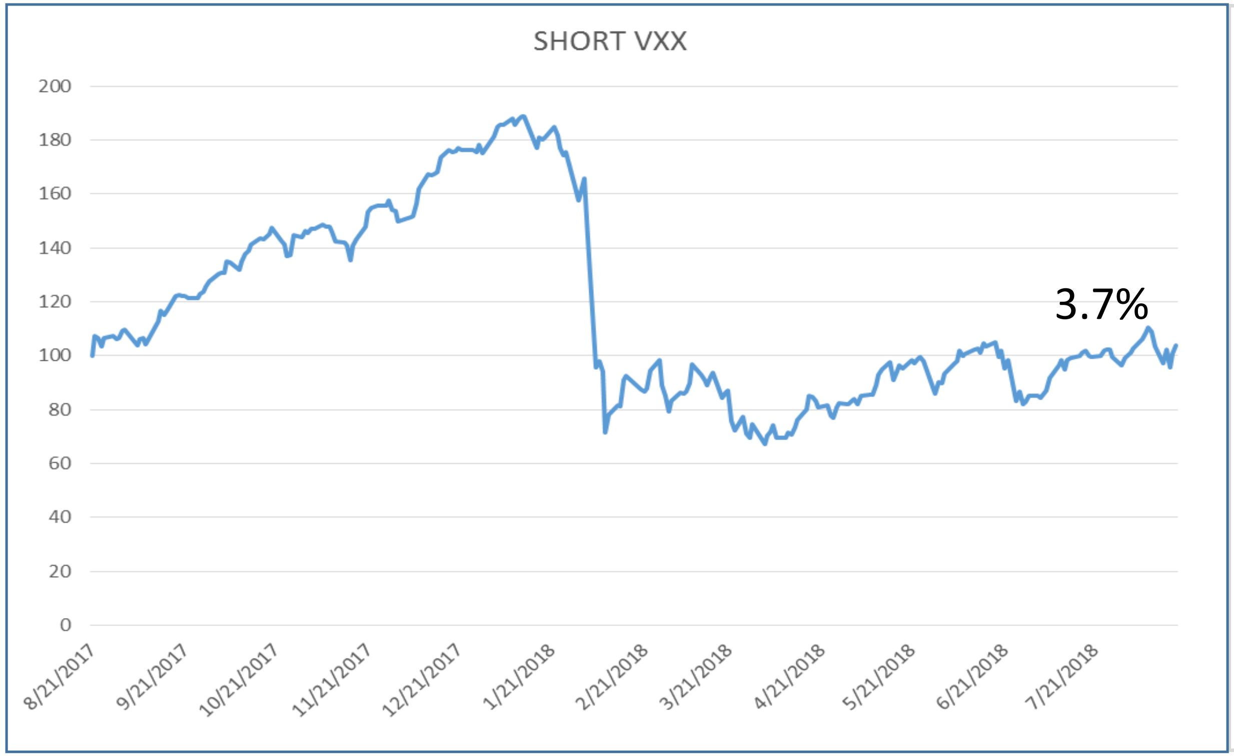
$$\text{Tendencia promedio } = \sum_{i=1}^{2} e^{-\bar{k}_i\theta}\left[\bar{k}_i(\mu_i - \bar{\mu}_i)\right] + r$$

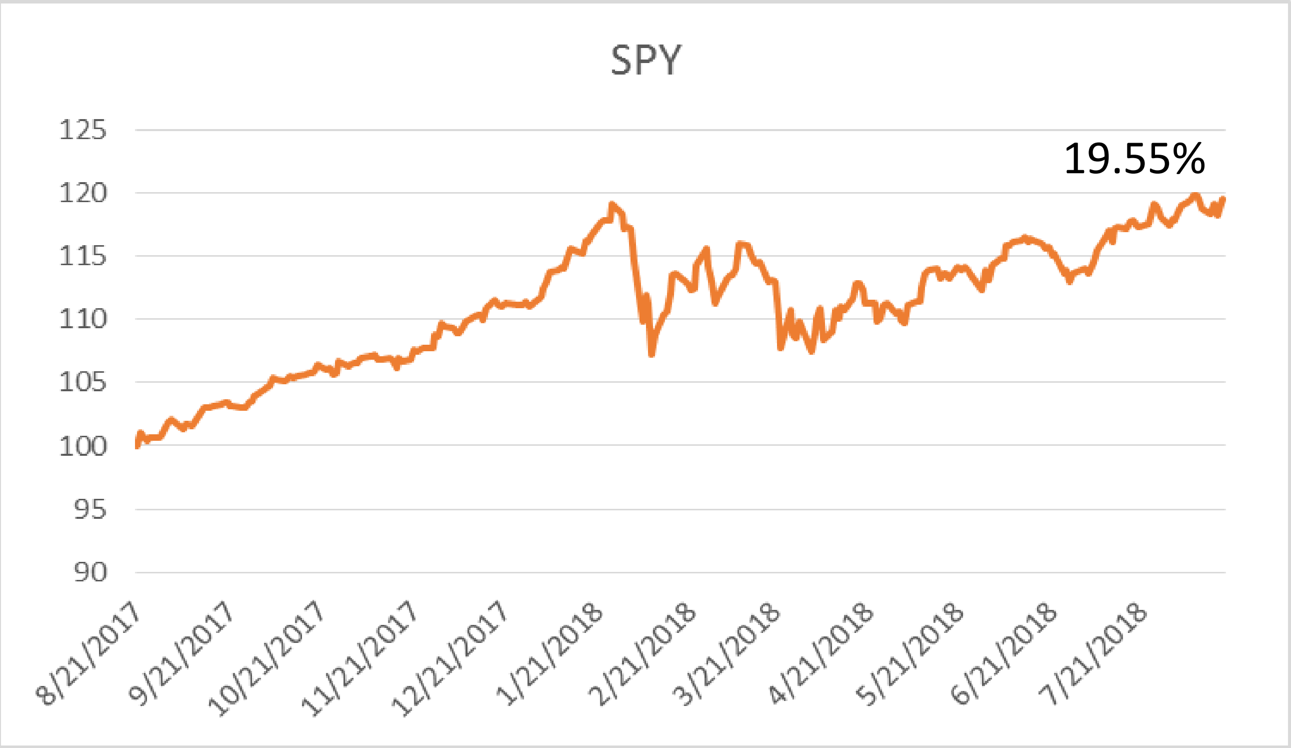
$$\sigma_I^2 = \sum_{ji=1}^{2} e^{-\bar{k}_i\tau} e^{\overline{-k}_j\tau}\, \sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$$

Predicciones:estrategias de venta de VXX, reinvertiendo ganancias y perdidas

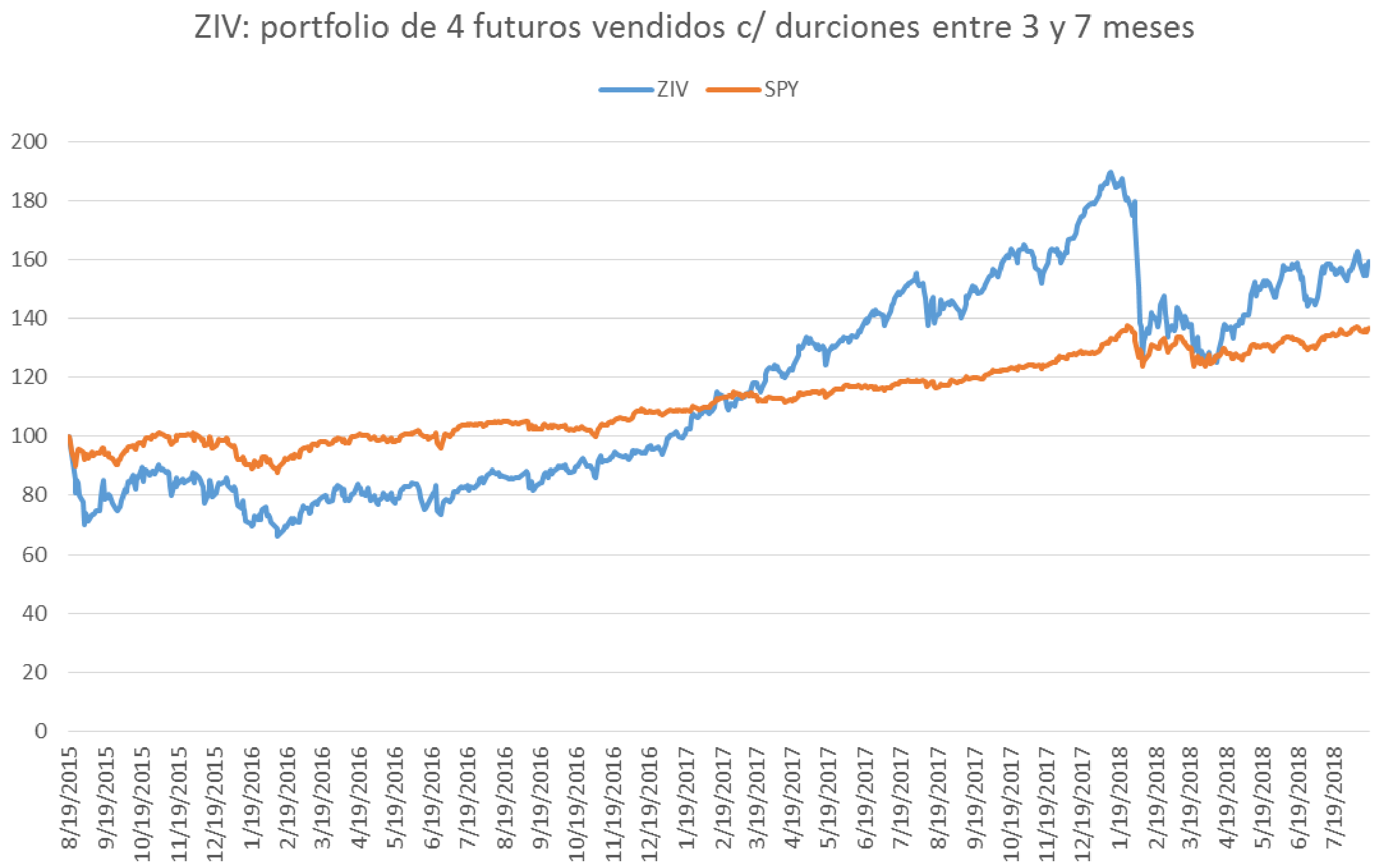
Datos para estimacion	Jul 07 to Jul 16 VIX, CMF 1M to 6M	Jul 07 to Jul 16 VIX, 1M, 6M	Feb 11 to Dec 16 VIX, CMF 1M to 7M	Feb 11 to Jul 16 VIX, 3M, 6M
Excess Return	0.30	0.32	0.56	0.53
Volatility	1.00	0.65	0.82	0.77
Sharpe ratio (short trade)	0.29	0.50	0.68	0.68

Vendiendo volatilidad implicita de 1 mes via VXX, ultimos 12 meses





Estrategia con 4 futuros vendidos (ZIV)



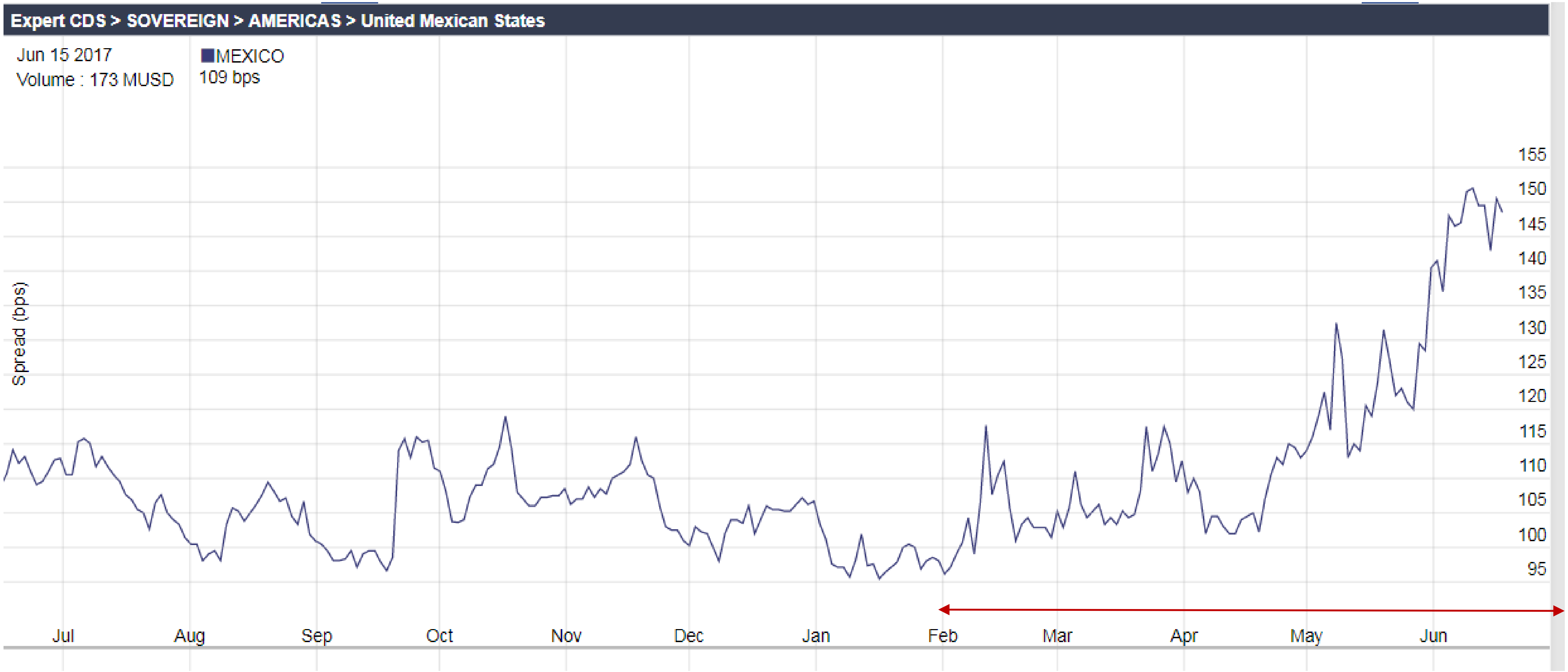
59.3%

Otras estrategias que ``venden volatilidad'' (indirectamente)

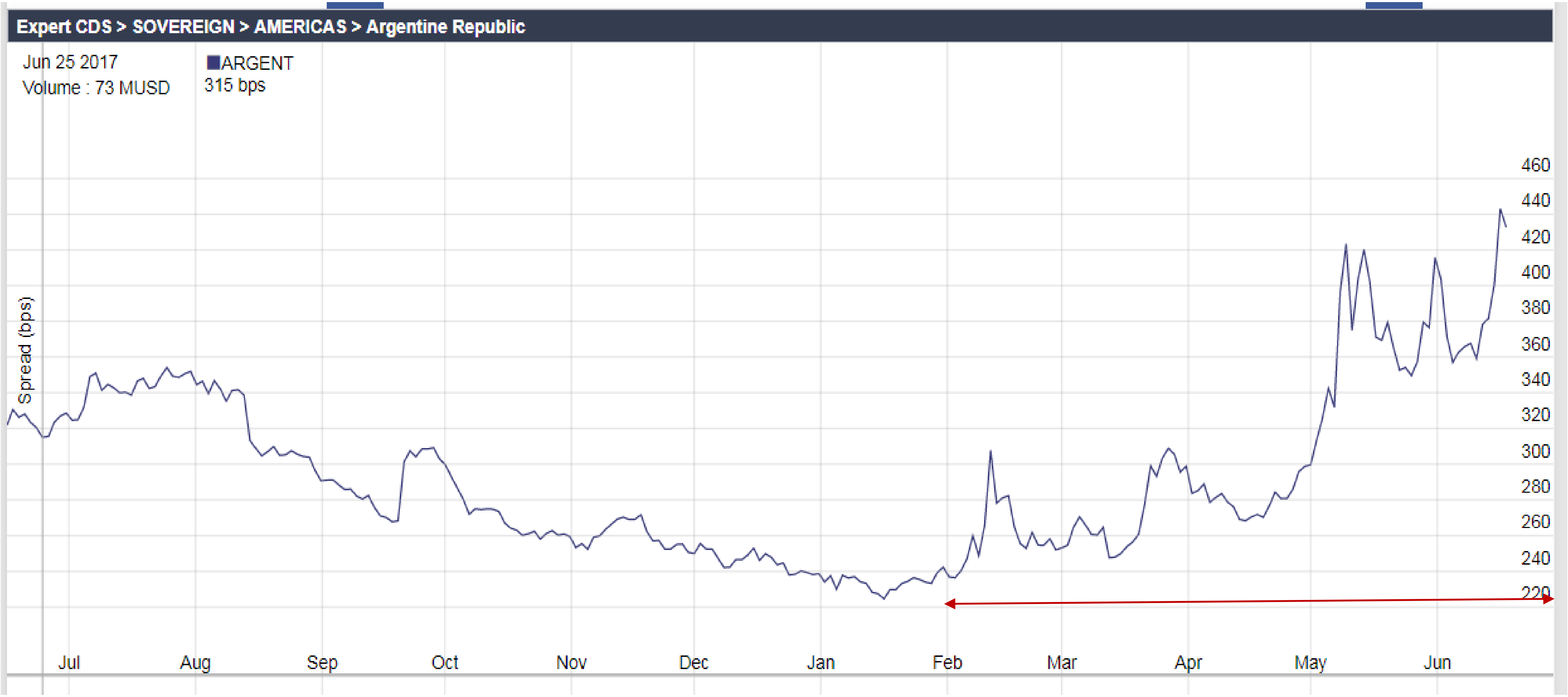
- **Arbitraje de divisas, o ``carry trade'':** compro divisa que paga la mayor tasa de interes, vendo la que paga menos.
- **Arbitraje de tasas de interes:** compro bono con TIR mayor, vendo bono con TIR menor.
- **Arbitrage de opciones de indice:** vendo opcion de indice y compro opciones sobre los titulos del indice
- **Valor relativo:** compro de Indice bursatil de pequenhas capitalizaciones, vendo el benchmark.
- **Substitucion** de renta fija por renta variable con baja volatilidad (era Bernanke/Yellen).

5Y CDS Mexico

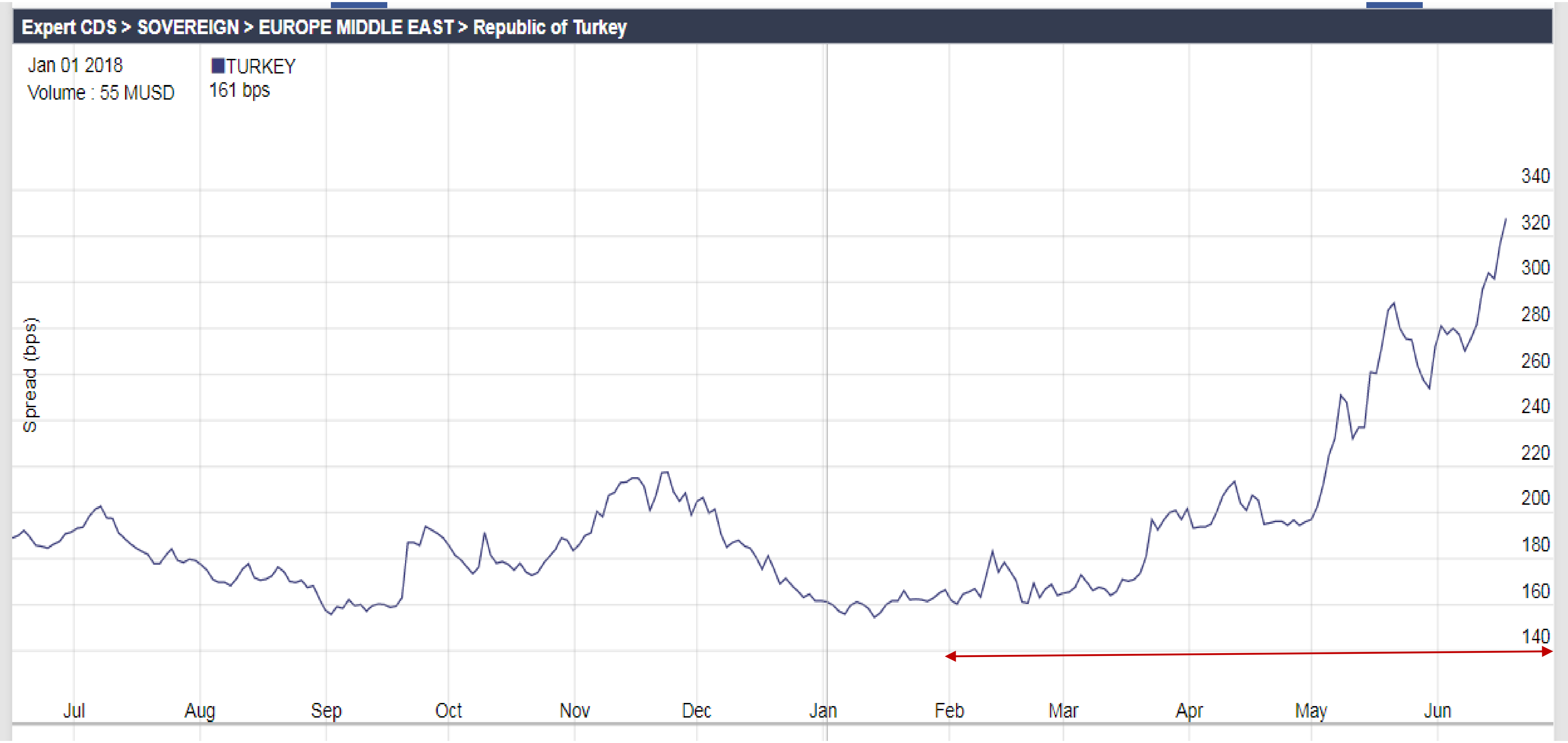
Costo de asegurar USD 10,000 de deuda soberana EE. UU. Mexico



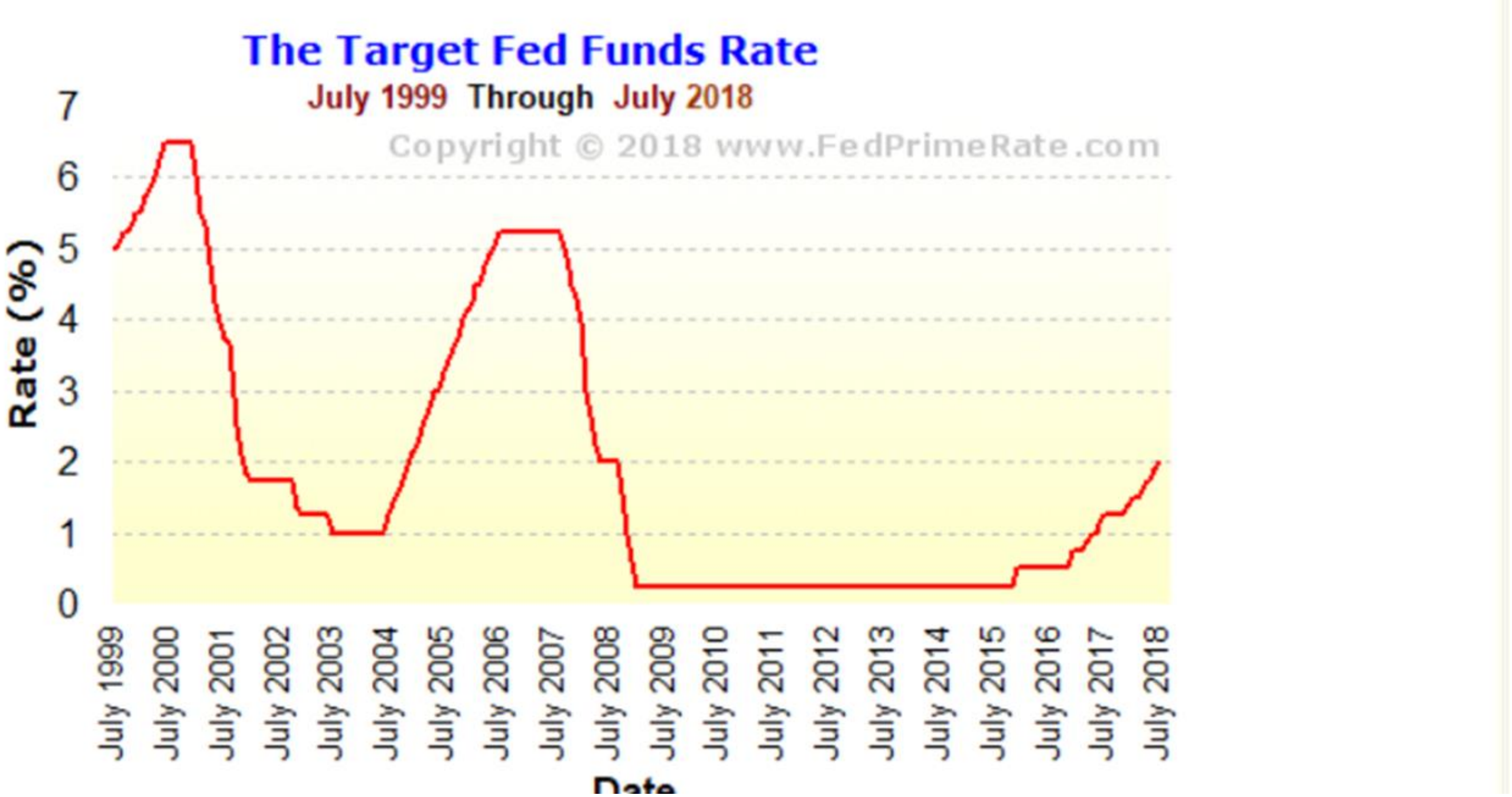
5Y CDS Argentina



5Y CDS Turquia



Nueva politica monetaria de la Reserva Federal Norteamericana



Conclusiones

- Presentamos un modelo cuantitativo para futuros de indice de volatilidad ,VIX.

- El modelo describe correctamente las ganancias esperadas vendiendo VIX y ETFs, que se atribuyen a contango (tipico) de la curva de futuros.

- Asimismo, indica que los Sharpe ratios son modestos (SR=rendimiento/volatilidad).

- Vender VIX pertenece al grupo de estrategias que <u>ganan con volatilidad baja en los mercados</u>, pero sufren perdidas considerables cuando hay un shock o un periodo extendido de incertidumbre.

- Las condiciones internacionales -- suba de tasas US, proteccionismo en comercio exterior, vulnerabilidad de divisas en Argentina, Turquia, la situacion en Oriente Medio, e inflacion – sugieren que la vender volatilidad como estrategia debe ocupar un lugar menor en gestion de activos que el que tuvo en los ultimos anhos.