

## Portafolios de dispersión mínima con rendimientos log-estables.

José Antonio Climent-Hernández\*

Universidad Autónoma Metropolitana, Departamento de Economía

(Primera recepción: 23 de Junio 2015, Segunda recepción: 03 de Junio 2016, Aceptado: 06 de Diciembre 2016)

---

---

### Resumen

Se analiza el problema de optimación de un portafolio con  $n$  activos cuando los rendimientos están modelados con procesos log-estables, el objetivo es calcular la diversificación de recursos de un producto estructurado considerando la duración y la convexidad de los mercados de deuda y la no linealidad de los mercados de opciones a través del modelo media-dispersión, comparando los resultados con la distribución log-gaussiana; encontrando que los portafolios log-estables presentan mayor aversión al riesgo que los portafolios log-gaussianos, los inversionistas log-estables mejoran las medidas de desempeño log-gaussianas, la aproximación cuadrática presenta un comportamiento semejante al portafolio óptimo cuadrático, favoreciendo la toma de decisiones; las distribuciones log-estables tienen la limitante porque presentan diferentes parámetros de estabilidad mientras que la distribución conjunta log-gaussiana tiene un parámetro de estabilidad único, entonces las asignaciones presentan diferencias por los componentes de riesgo; las innovaciones se presentan al modelar los mercados de deuda y los mercados de opciones, considerando los factores de participación del producto estructurado; concluyendo que los inversionistas que utilizan modelos log-estables son más eficientes que los que utilizan el modelo log-gaussiano.

*Clasificación JEL:* C46, D81, G11.

*Palabras clave:* Portafolio óptimo, Medida de riesgo, Distribuciones  $\alpha$ -estables.

### Minimum Dispersion Portfolios with Log-Stable Returns

#### Abstract

The optimization problem of a portfolio with  $n$  risky assets is analyzed when the returns are modeled with log-stable processes. The objective is to optimize the asset allocation of a structured product, considering both the duration and convexity of the debt markets and the nonlinearity of the option markets through a mean-dispersion model, comparing the results with the log-gaussian distribution. We find that log-stable portfolios show a greater risk aversion than log-gaussian portfolios, given that log-stable investors improve log-gaussian performance measures; the quadratic approximation displays a behavior similar to the optimal quadratic portfolio, favoring decision making. The log-stable distributions have a limitation because they present different stability parameters, whereas the log-gaussian joint distribution has a unique stability parameter, and therefore, the assignments present differences by means of the risk components. Our contribution comes from the fact that we are modeling the debt markets and option markets, considering the participation factors of the structured product. We conclude that log-stable investors are more efficient than log-gaussian investors.

*JEL Classification:* C46, D81, G11.

*Key Words:* Optimal Portfolio, Risk Measure,  $\alpha$ -Stable Distributions.

---

\* Universidad Autónoma Metropolitana, Felipe Carrillo Puerto No. 193, Popotla, C. P. 11400, Del. Miguel Hidalgo, Ciudad de México. Tel. 5531937365. Correo electrónico: jach@azc.uam.mx; antonio.climent@hotmail.com

## 1. Introducción

Markowitz (1952) desarrolló una de las primeras teorías resolviendo el problema de selección óptima de portafolios y describió los beneficios de la diversificación de recursos utilizando el supuesto de que los rendimientos tienen de una distribución gaussiana multivariada. Fama (1965a, 1963, 1965b) y Mandelbrot (1967, 1963) rechazan el supuesto gaussiano de la distribución empírica para evitar el riesgo de modelo para modelar la leptocurtosis, la asimetría y la memoria de los movimientos atípicos en los mercados financieros. Existe evidencia empírica donde las distribuciones log-estables modelan adecuadamente la leptocurtosis, la asimetría, las fluctuaciones lejanas a la moda (valores extremos) y la propiedad de estabilidad (memoria) de los rendimientos ya que son una alternativa más efectiva para modelar series financieras y económicas con cúmulos de volatilidad elevada, valores extremos con frecuencias superiores a lo esperado por la distribución log-gaussiana y que tienen un impacto financiero y económico de cuantías superiores, satisfacen el teorema del límite central generalizado porque los rendimientos se encuentran en el dominio de atracción de una ley log-estable donde la distribución log-gaussiana es el caso límite  $\alpha = 2$  y se ha mostrado que no es eficiente para modelar adecuadamente la leptocurtosis, la asimetría, los eventos lejanos al parámetro de localización y la propiedad de estabilidad observada en los rendimientos de las series financieras y económicas, mientras que los rendimientos log-estables satisfacen la propiedad de estabilidad que permite modelar las series empíricas optimando el desempeño del sistema por lo que las aplicaciones log-estables son más amplias que la aplicación log-gaussiana que considera eventos extremos y de alto impacto como poco probables y que son más frecuentes para las distribuciones log-estables. De Jesús *et al.* (2010), Téllez y Velázquez (2010), López *et al.* (2011), López y Ortiz (2011) proponen estimaciones alternativas a la distribución log-gaussiana para los rendimientos.

El objetivo de este trabajo de investigación es presentar el análisis del problema de la toma de decisiones de un inversionista que estructura un portafolio de activos con riesgo cuando la incertidumbre de los mercados financieros está modelada a través de rendimientos con distribuciones log-estables y las decisiones son tomadas a través del enfoque de minimización de la medida de riesgo como se ha propuesto en las investigaciones realizadas por Rachev *et al.* (2003), Ortobelli *et al.* (2004), Ortobelli *et al.* (2005b) y Climent-Hernández *et al.* (2015). Los portafolios óptimos se obtienen a través de los activos con riesgo de producto estructurado sobre un diferencial de compra al alza (bull call spread note) que originalmente se presentó en Climent-Hernández *et al.* (2015) quienes obtuvieron portafolios óptimos considerando activos con riesgo y un activo libre de riesgo. La innovación de la investigación presente, con respecto a Climent-Hernández *et al.* (2015), es que los portafolios óptimos se obtienen a través de activos con riesgo y además se incluyen aproximaciones lineales y cuadráticas para modelar la duración y la convexidad de los mercados de deuda y la no linealidad de los mercados de opciones, calculando las medidas de desempeño, considerando los factores de participación del producto estructurado se comparan las medidas de desempeño de los portafolios con las aproximaciones lineales y cuadráticas y en ambos casos (portafolios óptimos y portafolios basados en los factores de participación del producto estructurado) se comparan los portafolios log-estables con los portafolios log-gaussianos

concluyendo que los inversionistas log-estables son los que tienen más aversión al riesgo y mejoran las medidas de desempeño por lo que la distribución log-gaussiana es menos eficiente que las distribuciones log-estables para cuantificar el riesgo de mercado.

El trabajo está organizado de la forma siguiente: en la sección 2 se plantea el problema de optimización, se presenta la solución para el vector de diversificación de recursos del portafolio óptimo, se presenta la estimación de la matriz de dispersión-covariación y las aproximaciones (lineal y cuadrática) para modelar la duración y la convexidad de los rendimientos de los mercados de deuda y la no linealidad de los rendimientos de los mercados de opciones; en la sección 3 se describen los estadísticos básicos de los activos con riesgo, se estiman los parámetros  $\alpha$ -estables de los rendimientos y se presenta el análisis de los portafolios óptimos de los activos con riesgo y las aproximaciones (lineal y cuadrática); en la sección 4 define el producto estructurado sobre el diferencial de compra a la alza y se presenta el análisis del producto estructurado a través de las medidas de riesgo y las medidas de desempeño; en la sección 5 se presentan las conclusiones del trabajo de investigación, y por último la bibliografía.

## 2. Portafolio óptimo y la medida de riesgo log-estable

Se presenta el planteamiento y solución del problema de optimización de portafolios log-estables para la diversificación de recursos aprovechando los instrumentos de cobertura existentes en el MexDer para optimizar los rendimientos a través de la minimización de la medida de riesgo como se presentó en el trabajo de Climent-Hernández *et al.* (2015) quienes utilizaron el modelo de Tobin (1958), con la innovación de que en el planteamiento y la solución del problema se consideran activos con riesgo como en el modelo de Markowitz (1952).

Si el vector de rendimientos con riesgo  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$  tiene una distribución log-estable, el rendimiento esperado del portafolio es  $E(X) = \langle \mathbf{w}, E(\mathbf{r}) \rangle$  y se plantea el problema de optimización siguiente:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{w}}{\text{Minimizar}} \quad & \gamma_X^2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{Q}\mathbf{w} \rangle = \mathbf{w}^t \mathbf{Q}\mathbf{w} \\ \text{sujeto a:} \quad & \\ & \langle \mathbf{w}, \mathbf{e} \rangle = 1 \\ & E(X) = m_X \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $E(X) = \langle \mathbf{w}, E(\mathbf{r}) \rangle = m_X$  y la medida de riesgo  $\gamma_X = \gamma_{\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle}$  es una función convexa del vector de diversificación de recursos  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  y los portafolios óptimos log-estables pertenecen a la frontera media-dispersión:

$$\gamma_X^2 = \frac{m_X \mathbf{A} - 2m_X \mathbf{B} + \mathbf{C}}{\mathbf{A}\mathbf{C} - \mathbf{B}^2} \tag{2}$$

Donde  $\mathbf{A} = \langle \mathbf{e}, \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e} \rangle$ ,  $\mathbf{B} = \langle \mathbf{e}, \mathbf{Q}^{-1}E(\mathbf{r}) \rangle$ ,  $\mathbf{C} = \langle E(\mathbf{r}), \mathbf{Q}^{-1}E(\mathbf{r}) \rangle$  y el portafolio óptimo log-estable tiene el vector de diversificación de recursos:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\mathbf{A}} \langle \mathbf{e}, \mathbf{Q}^{-1} \rangle \tag{3}$$

Para  $\alpha \in (1, 2)$  y para  $p \in [0, \alpha)$ , la matriz de dispersión-covariación se estima por:

$$\gamma_{kk}^p = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right)}{2^p\Gamma\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} E(|X_k|^p) \quad (4)$$

y para  $p \in [1, \alpha)$ , se tiene que:

$$\gamma_{jk}^2 = \gamma_{kk}^{2-p} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right)}{2^p\Gamma\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} E\left(X_j X_k^{(p-1)}\right) \quad (5)$$

Y cuando  $\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$ , entonces para  $p \in [0, 2]$ , la matriz de varianza-covarianza se estima por:

$$\sigma_{kk}^p = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{p}{2}}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} E(|X_k|^p) \quad (6)$$

y para  $p \in [1, 2]$  se tiene:

$$\sigma_{jk}^2 = \sigma_{kk}^{2-p} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right)}{2^{\frac{3-p}{4}}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} E\left(X_j X_k^{(p-1)}\right). \quad (7)$$

## 2.1 Aproximaciones con distribuciones $\alpha$ -estables

Si las distribuciones de los rendimientos son log-estables, el modelo  $\Delta$ -log-gaussiano subestima la medida de riesgo, por lo que se propone usar el modelo lineal  $\Delta$ -log-estable que realiza estimaciones de la medida de riesgo suponiendo cambios lineales de los factores de riesgo. El modelo  $\Delta$ -log-estable es adecuado para portafolios de acciones, divisas y mercancías, pero no es adecuado para instrumentos que se modelan a través de la convexidad como los instrumentos de deuda (bonos), además tampoco lo es para instrumentos no lineales como las opciones. Por lo tanto, se propone usar el modelo cuadrático  $\Delta - \Gamma$ -log-estable para modelar la duración y la convexidad del bono y la no linealidad de las opciones para estimar la medida de riesgo de los factores del producto estructurado y la medida de riesgo del producto estructurado.

## 2.2 Medida de riesgo de un portafolio con rendimientos $\alpha$ -estables

Sean  $d\Pi = \delta dt + \gamma dY_t$  el cambio en el valor del portafolio donde  $\delta \in \mathbb{R}$ , y  $\gamma \in \mathbb{R}_{++}$   $Y_t \sim S_1(\alpha, \beta)$  definido en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t \in [0, T]}, \mathcal{P})$  y  $X$  una variable aleatoria log-estable con la función de distribución continua  $F_X(x)$ , entonces  $X = d\Pi \sim S_1\left(\alpha, \beta, \gamma\tau^{\alpha-1}\right)$  y la medida de riesgo es  $\gamma_X^2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{Q}\mathbf{w} \rangle$ .

El espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathcal{P})$  donde  $(\Omega)$  es el espacio muestra y representa al conjunto de los precios posibles de cada uno de los  $n$  activos con riesgo y que están representados por el proceso estocástico  $M(t) = \{M_k(t) : k = 1, \dots, n \text{ y } t \in [0, T]\}$ , el precio subyacente del  $k$ -ésimo activo en el instante  $t$  está dado por  $M_k(t)$  que satisface  $M_k(t) > 0$  para cualquier  $t \in [0, T]$ .  $\mathcal{F}$  representa la  $\sigma$ -álgebra y es la colección de subconjuntos del espacio muestra que satisface las propiedades siguientes:  $\Omega \in \mathcal{F}$ , si  $A \in \mathcal{F}$ , entonces  $A^c \in \mathcal{F}$  y si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ , entonces  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$ , es decir, la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  es una

estructura que agrupa a eventos que se les puede calcular una probabilidad y en consecuencia los elementos de  $\mathcal{F}$  representan eventos que establecen el dominio de una medida de probabilidad donde cada proceso estocástico  $M_k(t) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  es adaptado a la filtración  $\mathcal{F}_t$  que representa la información en instante  $t$ .  $\mathcal{F}_t$  es la colección de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  tal que  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$  cuando  $s < t$ . El par  $(\Omega, \mathcal{F})$  es un espacio medible y  $\mathcal{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  es una medida de probabilidad que satisface los postulados:  $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ , si  $A \in \mathcal{F}$ , entonces  $\mathcal{P}A \geq 0$  y si para toda  $k \geq 1$ ,  $A_k \in \mathcal{F}$ , para toda  $m \neq n$  y  $A_m \cap A_n = \emptyset$ , entonces  $\mathcal{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_k)$ . Equivalentemente para los rendimientos subyacentes donde  $r_k(t) = \ln(M_k(t+1)) - \ln(M_k(t))$  que satisface  $r_k(t) \in \mathbb{R}$  para cualquier  $t \in [0, T]$  y los elementos de  $\mathcal{F}$  representan eventos que establecen el dominio de una medida de probabilidad donde cada proceso estocástico  $r_k(t) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es adaptado a la filtración  $\mathcal{F}_t$ .

### 2.3 La medida de riesgo a través del modelo log-estable lineal

Sea  $c(t, M_t)$  una opción europea de compra sobre un activo que no paga dividendos y que se encuentra dentro de dinero de tal forma que  $\Delta \rightarrow 1$  y en consecuencia  $\Gamma \rightarrow 0$ , por lo cual  $dc(t, M_t)$  se obtiene a través de la aproximación lineal  $dc(t, M_t) \approx \Delta_c dM_t$ , y cuando las distribuciones de los rendimientos son log-estables, la medida de riesgo es  $\gamma_{d\Pi}^2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{Q}\mathbf{w} \rangle$  y cuando la distribución es log-gaussiana, la medida de riesgo es  $\sigma_{d\Pi}^2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{Q}\mathbf{w} \rangle$ . Esta aproximación también funciona adecuadamente para portafolios sobre contratos a plazo (forwards) y futuros.

### 2.4 La medida de riesgo a través del modelo log-estable cuadrático

Si el portafolio  $\Pi$  incluye opciones, el modelo lineal es una aproximación menos precisa porque cuando  $\Delta_c < 1$ , entonces  $\Gamma_c > 0$  y por lo tanto el modelo lineal no considera la curvatura entre el valor del portafolio y el precio subyacente y la distribución del cambio en el valor del portafolio  $d\Pi$  presenta sesgo que es modelado adecuadamente por las distribuciones log-estables.

Sea  $c(t, M_t)$  una opción de compra sobre un activo que no paga dividendos, para obtener una aproximación más precisa de la medida de riesgo se incluyen la  $\Delta_c$  y la  $\Gamma_c$ , entonces a través de la aproximación cuadrática se tiene que  $dc(t, M_t) \approx \Delta_c dM_t + 2^{-1}\Gamma_c (dM_t)^2$ . Si  $\text{cov}(dM_t, (dM_t)^\alpha) = 0$ , y  $dM_t = \gamma_{dM_t} dZ_t$  donde  $Z_t \sim S_1(\alpha, \beta)$ , por lo cual  $\gamma_{d\Pi}^2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{Q}\mathbf{w} \rangle$  si las distribuciones de los rendimientos son log-estables y si la distribución es log-gaussiana, entonces  $\sigma_{d\Pi}^2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{Q}\mathbf{w} \rangle$ . La aproximación cuadrática es más adecuada que la lineal para portafolios sobre opciones y bonos, y cuando  $\Gamma = 0$ , el problema se reduce a la aproximación lineal.

## 3. Portafolio óptimo y la medida de riesgo

En Climent-Hernández *et al.* (2015) se comparan las distribuciones log-estables y log-gaussiana para el problema de asignación óptima con diecinueve activos con riesgo y un activo libre de riesgo, utilizando las paridades fix y spot, el futuro sobre el dólar americano negociado en el MexDer y el precio de dieciséis opciones de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot negociadas en el MexDer con información del 3 de enero de 2011 al 19 de diciembre de 2011.

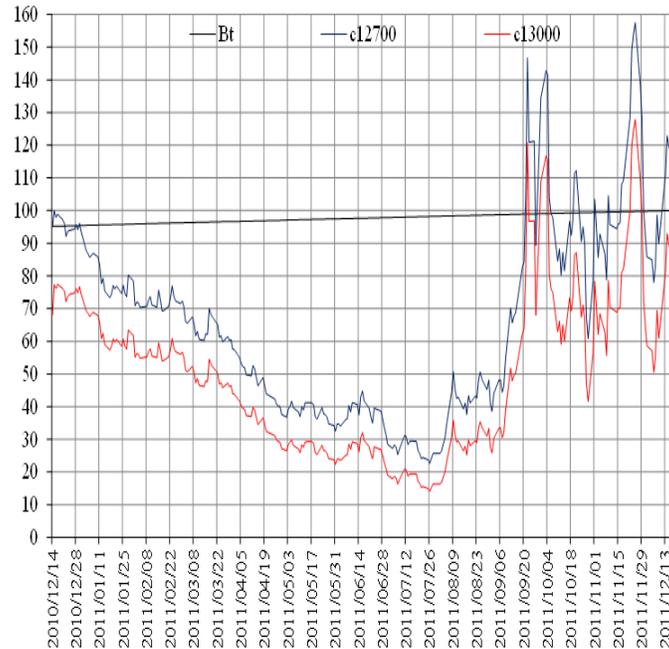
### 3.1 Activos con riesgo

En la investigación presente se consideran los tres activos con riesgo siguientes:

1. El precio del bono del 14 de diciembre de 2010 al 19 de diciembre de 2011.
2. El precio teórico de una opción europea de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot negociada en el MexDer del 14 de diciembre de 2010 con vencimiento el 19 de diciembre de 2011 (370 días de vigencia) con precio de liquidación  $S = 12.70$ .
3. El precio teórico de una opción europea de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot negociada en el MexDer de la misma clase, y con precio de liquidación  $S = 13.00$ .

Los precios del bono  $B_t$  y de los dos lotes que amparan, cada uno, cien opciones europeas de compra  $c_{12700}(t, F_t)$  y  $c_{13000}(t, F_t)$  emitidas sobre el precio futuro  $F_t$  del tipo de cambio spot con precios de liquidación  $S = 12.70$  y  $S = 13.00$ , respectivamente, con 370 días de vigencia (serie L) negociadas en el MexDer se pueden observar en la Gráfica 1.

Gráfica 1. Precios de los subvacentes con riesgo.



Fuente: Elaboración propia con datos del MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 4.3.3.2).

En la Gráfica 1 se observa el precio del bono  $B_t$  (línea negra) y los precios teóricos de las opciones europeas de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot  $c_{12700}$  (línea color marino) y  $c_{13000}$  (línea roja) serie L negociadas en el MexDer.

### 3.2 Estadísticos básicos de los rendimientos subyacentes

La estimación de los estadísticos básicos de los rendimientos diarios se presenta en el Cuadro 1.

Cuadro 1. Estadísticos básicos de los rendimientos con riesgo.

Subyacente	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
$R_{B_t}$	0.6017	0.2145	0.000017	0.000130
$R_{c_{12700}}$	1.4253	0.4956	0.041373	0.012057
$R_{c_{13000}}$	1.4111	0.4507	0.048487	0.013334

Fuente: Elaboración propia con datos del MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 4.3.3.2).

En el Cuadro 1 el promedio positivo indica que los rendimientos se aprecian con respecto a la tasa de interés, con respecto al peso mexicano y al futuro del tipo de cambio spot pesos por dólar americano, respectivamente. El coeficiente de asimetría positivo de los tres subyacentes indica que los rendimientos tienen una distribución que se extiende hacia valores positivos con mayor frecuencia que hacia los valores negativos. El coeficiente de curtosis positivo<sup>1</sup>

### 3.3 Estimación de los parámetros $\alpha$ -estables

Las características de los rendimientos subyacentes indican que la distribución es asimétrica y presenta leptocurtosis, la estimación de parámetros  $\alpha$ -estables se realiza a través del método de estimación de verosimilitud máxima utilizando el programa STABLE.EXE.<sup>2</sup> La estimación de parámetros  $\alpha$ -estables se presenta en el Cuadro 2.

Cuadro 2. Estimación de parámetros  $\alpha$ -estables de los rendimientos con riesgo.

Subyacente	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
$R_{B_t}$	0.6017	0.2145	0.000017	0.000130
$R_{c_{12700}}$	1.4253	0.4956	0.041373	0.012057
$R_{c_{13000}}$	1.4111	0.4507	0.048487	0.013334

Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer y el programa STABLE.EXE.

Los parámetros de estabilidad  $\alpha$  y asimetría  $\beta$  de los rendimientos  $R_{c_{12700}}$  y  $R_{c_{13000}}$  presentados en el Cuadro 2 son consistentes con los resultados presentados en las investigaciones realizadas por Dostoglou y Rachev (1999), Ortobelli *et al.* (2002), Rachev *et al.* (2003), Ortobelli *et al.* (2004), Rachev *et al.* (2004), Ciek *et al.* (2005), Ortobelli *et al.* (2005a), Scalas y Kim (2006), Contreras y Venegas-Martínez (2011), Climent-Hernández y Venegas-Martínez

<sup>1</sup> El coeficiente de curtosis utilizado es  $g_2 = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k - \bar{x}}{s}\right)^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$

<sup>2</sup> Programa desarrollado por John P. Nolan disponible en <http://academic2.american.edu/jpnolan/stable/stable.html>.

(2013), y por Climent-Hernández *et al.* (2015), excepto para los rendimientos  $R_{B_t}$  que tienen una distribución  $\alpha$ -estable con  $\alpha = 0.6017$ . El bono es el componente principal de los productos estructurados y como se puede observar es el activo con la medida de riesgo mínima de los tres activos. Los parámetros de estabilidad indican que las distribuciones presentan leptocurtosis. Los parámetros de asimetría positivos indican que las distribuciones tienen el extremo derecho se extiende más que el extremo izquierdo y los parámetros de localización indican que las modas de las distribuciones son positivas.

### 3.4 El modelo media-dispersión

Climent-Hernández *et al.* (2015) proponen que el vector de rendimientos  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$  tiene una distribución log-estable, con  $\alpha = \alpha_k$  para  $k = 1, 2, 3$ , donde  $\alpha_1 = \min(\alpha_k)$  es el mínimo de los parámetros de estabilidad de los rendimientos de las opciones,  $\alpha_2 = \bar{\alpha}_k$  es el promedio de los parámetros de estabilidad de los rendimientos de las opciones,  $\alpha_3 = \max(\alpha_k)$  es el máximo de los parámetros de estabilidad de las opciones. La matriz de covariación  $Q_k$  para los valores  $k = 1, 2, 3, 4$  depende de los parámetros de estabilidad  $\alpha_k \in (0, 2]$  y de  $p_k$  donde  $p_1 < \alpha_1, p_2 < \alpha_2, p_3 < \alpha_3$  y  $p_4 = 2$ .

El producto estructurado que tiene el vector de rendimientos  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$  es comparado con una tasa instantánea anual del 4.3747%, utilizando datos de los días hábiles del 14 de diciembre de 2010 al 19 de diciembre de 2011 y utilizando el método de estimación de verosimilitud máxima para los parámetros  $\alpha$ -estables.

### 3.5 Portafolio óptimo log-estable

Los inversionistas que desean resolver el problema de optimización obtienen la diversificación de recursos siguiente:

Cuadro 3. Portafolios óptimos en mercados log-estables.

Subyacente	$\alpha_1 = 1.4111$	$\alpha_2 = 1.4182$	$\alpha_3 = 1.4253$	$\alpha_4 = 2.0000$
$R_{B_t}$	0.99967099	0.99967609	0.99968103	0.99991957
$R_{c_{12700}}$	0.00167440	0.00164590	0.00161840	0.00027642
$R_{c_{13000}}$	-0.00134539	-0.00132199	-0.00129943	-0.00019598
$E(\Pi)$	0.00019341	0.00019341	0.00019341	0.00022014
$\gamma_\Pi$	0.00000043	0.00000073	0.00000100	0.00401740
$\rho_\Pi$	161.85433289	95.89316027	69.87200701	0.02401575

Fuente: Elaboración propia con datos del MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 4.3.3.2).

En el Cuadro 3 se presenta la diversificación de recursos de los tres activos cuando las ventas en corto están permitidas. Los portafolios óptimos para el bono tienen una inversión monótona creciente donde  $w_1(B_t) < \dots < w_4(B_t)$ , por lo que la distribución log-gaussiana subestima el riesgo de la inversión por la tenencia del bono con respecto a las distribuciones log-estables. Los portafolios óptimos para la posición larga de la opción  $c_{12700}$  tienen una inversión monótona decreciente de tal forma que la diversificación  $w_1(c_{12700}) > \dots > w_4(c_{12700})$ , por lo que la distribución log-gaussiana sobrestima el riesgo de la inversión por

la tenencia de la opción  $c_{12700}$  con respecto a las distribuciones log-estables. Los portafolios óptimos para la posición corta de la opción  $c_{13000}$  tienen una inversión monótona creciente donde  $w_1(c_{13000}) < \dots < w_4(c_{13000})$ , por lo que la distribución log-gaussiana subestima el riesgo por la emisión de la opción  $c_{13000}$  con respecto a las distribuciones log-estables. Los inversionistas que suponen una distribución log-gaussiana no están considerando el componente de riesgo por la leptocurtosis y los inversionistas que están modelando los rendimientos con distribuciones log-estables, implícitamente están aproximando el componente del riesgo por la leptocurtosis y por el sesgo de las distribuciones empíricas de los rendimientos. Los parámetros de estabilidad están relacionados con las inversiones de los portafolios óptimos y los parámetros de escala son  $\gamma_1 < \dots < \gamma_4$ , por lo que el portafolio log-gaussiano tiene un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_3$  porque tiene un componente de riesgo que no está considerado como en el portafolio  $\alpha_3$  que tiene un componente de riesgo que no es considerado como en el portafolio  $\alpha_2$  que tiene un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_1$ . El portafolio  $\alpha_1$  tiene un riesgo  $\gamma_1 = 0.00000043$ , un rendimiento esperado  $E(\Pi_1) = 0.00019341$  y un índice log-estable de desempeño  $\rho_1 = 161.85$ . Por lo anterior, el portafolio óptimo  $\alpha_1$  tiene el riesgo mínimo, el rendimiento esperado menor, y el índice de desempeño máximo de los portafolios óptimos. Utilizando los tres subyacentes con riesgo, el portafolio óptimo es un producto estructurado constituido por la posición larga del bono  $B_t$  y la opción  $c_{12700}$ , y la posición corta de la opción  $c_{13000}$ .

**3.7 Portafolio óptimo log-estable a través de la aproximación lineal**

En esta sección se emplea el modelo lineal propuesto utilizando la primera diferencia para modelar la duración del bono, así como aproximar los rendimientos de las opciones a través de la de las opciones. Los estadísticos básicos se presentan en el Cuadro 4.

Cuadro 4. Estadísticos básicos de la aproximación lineal de los rendimientos.

Subyacente	Mínimo	Máximo	Promedio	Desviación	Asimetría	Curtosis
$R_{B_t}$	-0.000501	0.000572	0.000010	0.000074	2.497304	36.660718
$R_{c_{12700}}$	-0.341114	0.298086	0.002767	0.090081	-0.029304	2.944848
$R_{c_{13000}}$	-0.398638	0.342143	0.003250	0.107019	-0.048238	3.045564

Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 4.3.3.2).

En el Cuadro 4 el promedio tiene un comportamiento similar al del Cuadro 1. El coeficiente de asimetría indica que los rendimientos del bono tienen una distribución que se extiende hacia valores positivos con mayor frecuencia que hacia los valores negativos y que los rendimientos de las opciones tienen una distribución que se extiende hacia valores negativos con mayor frecuencia que hacia los valores positivos. El coeficiente de curtosis de los tres subyacentes indica que la distribución de los rendimientos presenta leptocurtosis con respecto a la distribución gaussiana. La estimación de los parámetros  $\alpha$ -estables para la aproximación lineal de los rendimientos se presenta en el Cuadro 5.

Cuadro 5. Estimación de parámetros  $\alpha$ -estables para la aproximación lineal.

Subyacente	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
$R_{B_t}$	0.7846	0.0340	0.000004	0.000004
$R_{c_{12700}}$	1.4205	0.4814	0.041668	0.015801
$R_{c_{13000}}$	1.4029	0.4413	0.048429	0.018066

Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer y el programa STABLE.EXE.

Los parámetros  $\alpha$ -estables presentados en el Cuadro 5 son consistentes con los resultados del Cuadro 2. Los parámetros de estabilidad indican que las distribuciones presentan leptocurtosis. Los parámetros de asimetría positivos indican que las distribuciones tienen el extremo derecho más extenso que el extremo izquierdo y los parámetros de localización indican que las modas de las distribuciones son positivas. El portafolio óptimo log-estable para la aproximación lineal se presenta en el Cuadro 6.

Cuadro 6. Portafolios óptimos para la aproximación lineal.

Subyacente	$\alpha_1 = 1.4029$	$\alpha_2 = 1.4117$	$\alpha_3 = 1.4205$	$\alpha_4 = 2.0000$
$R_{B_t}$	0.99948536	0.99949173	0.99949771	0.99982644
$R_{c_{12700}}$	0.00299564	0.00294849	0.00290382	0.00048548
$R_{c_{13000}}$	-0.00248101	-0.00244022	-0.00240153	-0.00031192
$E(\Pi)$	0.00001049	0.00001050	0.00001050	0.00013555
$\gamma_{\Pi}$	0.00000037	0.00000032	0.00000027	0.00407810
$\rho_{\Pi}$	-304.78583820	-348.42394957	-460.02712336	0.00291712

Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 4.3.3.2).

En el Cuadro 6 se presenta la diversificación de recursos para la aproximación lineal cuando las ventas en corto están permitidas. Los portafolios óptimos para el bono tienen un comportamiento similar al del Cuadro 3 con una inversión monótona creciente de tal forma que  $w_1(B_t) < \dots < w_4(B_t)$ . Los portafolios óptimos para la posición larga de la opción  $c_{12700}$  tienen una inversión monótona decreciente donde  $w_1(c_{12700}) > \dots > w_4(c_{12700})$ . Los portafolios óptimos para la posición corta de la opción  $c_{13000}$  tienen una inversión monótona creciente  $w_1(c_{13000}) < \dots < w_4(c_{13000})$ . Los parámetros de estabilidad están relacionados con las inversiones óptimas de los portafolios y se observa que los parámetros de escala son  $\gamma_3 < \gamma_2 < \gamma_1 < \gamma_4$ , por lo que el portafolio log-gaussiano tiene un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_1$  que a su vez tiene un componente de riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_2$  que también tiene un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_3$ . El portafolio  $\alpha_3$  tiene un riesgo  $\gamma_3 = 0.00000027$ , un rendimiento esperado  $E(\Pi_3) = 0.00001050$  y un índice log-estable de desempeño  $\rho_3 = -460.03$ . Por lo anterior, el portafolio óptimo  $\alpha_3$  tiene el riesgo mínimo, el rendimiento esperado mayor de las distribuciones log-estables pero menor que el rendimiento esperado de la

distribución log-gaussiana, y el índice de desempeño máximo en valor absoluto de los portafolios óptimos log-gaussianos, es decir, la aproximación lineal tiene rendimientos esperados menores a la tasa instantánea anual del 4.3747% para las distribuciones log-estables y tiene rendimientos mayores para la distribución log-gaussiana, entonces la distribución log-gaussiana sobrestima el rendimiento esperado con respecto a las distribuciones log-estables con la aproximación lineal de los rendimientos. A través de la aproximación lineal de los rendimientos, el portafolio óptimo también es un producto estructurado sobre un diferencial de compra al alza.

### 3.8 Portafolio óptimo log-estable a través de la aproximación cuadrática

En esta sección se emplea el modelo cuadrático utilizando la primera y la segunda diferencia para modelar la duración y la convexidad del bono, respectivamente, y aproximar los rendimientos de las opciones. Los estadísticos básicos se presentan en el Cuadro 7.

Cuadro 7. Estadísticos básicos de la aproximación cuadrática de los rendimientos.

Subyacente	Mínimo	Máximo	Promedio	Desviación	Asimetría	Curtosis
$R_{B_1}$	-0.000501	0.000572	0.000010	0.000074	2.499080	36.663546
$R_{r_{12700}}$	-0.340853	0.298140	0.005198	0.091082	0.026928	2.919554
$R_{r_{2008}}$	-0.397397	0.452519	0.013612	0.113075	0.235313	3.129194

Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 4.3.3.2).

En el Cuadro 7, el promedio tiene un comportamiento similar a los Cuadros 1 y 4. El coeficiente asimetría indica que los rendimientos de los subyacentes con riesgo tienen una distribución que se extiende hacia valores positivos con mayor frecuencia que hacia los valores negativos. El coeficiente de curtosis de los tres subyacentes indica que la distribución de los rendimientos presenta leptocurtosis con respecto a la distribución gaussiana. La estimación de los parámetros  $\alpha$ -estables para la aproximación cuadrática de los rendimientos se presenta en el Cuadro 8.

Cuadro 8. Estimación de parámetros  $\alpha$ -estables para la aproximación cuadrática.

Subyacente	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
$R_{B_1}$	0.7846	0.0340	0.000004	0.000004
$R_{r_{12700}}$	1.3587	0.5381	0.040081	0.023334
$R_{r_{13000}}$	1.2000	0.5140	0.041915	0.055445

Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer y el programa STABLE.EXE.

Los parámetros  $\alpha$ -estables presentados en el Cuadro 8 son consistentes con los resultados de los Cuadros 2 y 5. El bono tiene la medida de riesgo mínima de los tres activos. Los parámetros de estabilidad indican que las distribuciones

presentan leptocurtosis. Los parámetros de asimetría positivos indican que las distribuciones tienen el extremo derecho más extenso que el extremo izquierdo y los parámetros de localización indican que las modas de las distribuciones son positivas. El portafolio óptimo log-estable para la aproximación cuadrática se presenta en el Cuadro 9.

Cuadro 9. Portafolio óptimo para la aproximación cuadrática.

Subyacente	$\alpha_1 = 1.2000$	$\alpha_2 = 1.2793$	$\alpha_3 = 1.3587$	$\alpha_4 = 2.0000$
$R_{B_t}$	0.99979959	0.99981565	0.99982499	0.99986516
$R_{c_{12700}}$	0.00099171	0.00085190	0.00075305	0.00022423
$R_{c_{13000}}$	-0.00079130	-0.00066754	-0.00057804	-0.00008938
$E(\Pi)$	0.00000465	0.00000561	0.00000632	0.00012366
$\gamma_{\Pi}$	0.00000014	0.00000009	0.00000025	0.00407640
$\rho_{\Pi}$	-875.69356810	-1,257.69485992	-514.55181190	0.00000075

Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 4.3.3.2).

En el Cuadro 9 se presenta la diversificación de recursos para la aproximación cuadrática cuando las ventas en corto están permitidas. Los portafolios óptimos para el bono tienen un comportamiento similar a los de los Cuadros 3 y 6 con una inversión monótona creciente  $w_1(B_t) < \dots < w_4(B_t)$ . Los portafolios óptimos para la posición larga de la opción  $c_{12700}$  tienen una inversión monótona decreciente donde  $w_1(c_{12700}) > \dots > w_4(c_{12700})$ . Los portafolios óptimos para la posición corta de la opción  $c_{13000}$  tienen una inversión monótona creciente  $w_1(c_{13000}) < \dots < w_4(c_{13000})$ . Se observa diferencia en el comportamiento de los parámetros de escala donde  $\gamma_2 < \gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_4$ , por lo tanto, el portafolio log-gaussiano presenta un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_3$  que a su vez tiene un componente de riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_1$  que también tiene un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_2$ . El portafolio  $\alpha_2$  tiene un riesgo  $\gamma_2 = 0.00000009$ , un rendimiento esperado  $E(\Pi_2) = 0.00000561$  y un índice  $\alpha$ -estable de desempeño  $\rho_2 = -1,257.69$ . Por lo anterior, el portafolio óptimo  $\alpha_2$  tiene el riesgo mínimo, el tercer rendimiento esperado de las distribuciones log-estables, y el índice de desempeño máximo en valor absoluto de los portafolios óptimos log-estables considerados, es decir, la aproximación cuadrática presenta rendimientos esperados menores que la tasa instantánea anual considerada del 4.3747% por lo que se puede concluir que la distribución log-gaussiana sobrestima el rendimiento esperado con respecto a las distribuciones log-estables. El portafolio óptimo, a través de la aproximación cuadrática de los rendimientos, también es un producto estructurado sobre un diferencial de compra al alza.

#### 4. Producto estructurado sobre un diferencial de compra al alza

En la cobertura de compra al alza (bull call spread) los inversionistas esperan que el precio subyacente aumente e invierten en un portafolio con la posición larga en opciones de compra con precio de liquidación  $S_1$  y la posición corta en opciones de compra de la misma clase, la misma fecha de vencimiento y con precio de liquidación  $S_2$  donde  $S_2 > S_1$  y por lo cual  $c_1 > c_2$ . La nota

estructurada sobre un diferencial de compra al alza (bull call spread note) permite a los inversionistas obtener el rendimiento de un mercado extranjero, al que posiblemente no se tiene acceso directamente, a través de un portafolio con instrumentos nacionales.

La hoja de términos del producto estructurado incluye la posición larga del valor presente del valor nominal del bono donde  $B_0 = 95.169449$ , el 6.4611% en la posición larga de las opciones con valor teórico  $c_{12700} = 0.949861$  equivalente a 6.802253 contratos y el 1.630549% en la posición corta de las opciones con valor teórico  $c_{13000} = 0.680186$  equivalente a 2.397211 contratos. Considerando los términos y los factores de participación, se presenta el rendimiento esperado, la medida de riesgo, y el índice de desempeño de los portafolios log-estables en el Cuadro 10.

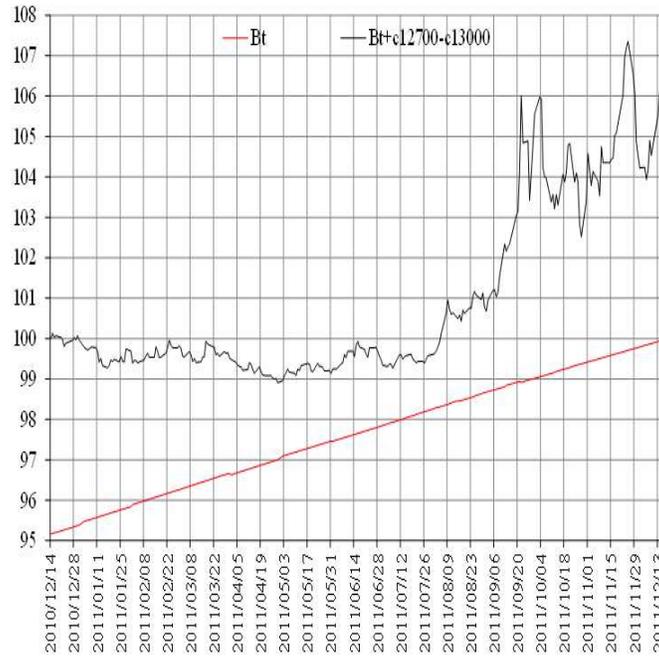
Cuadro 10. Nota estructurada sobre un diferencial de compra al alza.

Subyacente	$\alpha_1 = 1.4111$	$\alpha_2 = 1.4182$	$\alpha_3 = 1.4253$	$\alpha_4 = 2.0000$
E( $\Pi$ )	0.00022014	0.00022014	0.00022014	0.00022014
$\gamma_\Pi$	0.00000661	0.00001118	0.00001536	0.00401740
$\rho_\Pi$	14.58763391	8.63176889	6.28160378	0.02401575

Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 4.3.3.2).

En el Cuadro 10 se puede observar que los inversionistas que suponen a priori una distribución log-gaussiana no consideran el componente de riesgo por la leptocurtosis (eventos probables y de gran impacto) mientras que los inversionistas que utilizan las distribuciones log-estables están aproximando de mejor forma el componente de riesgo de las distribuciones empíricas. Los parámetros de escala son monótonos crecientes  $\gamma_1 < \dots < \gamma_4$ , por lo que el portafolio log-gaussiano tiene un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_3$  y éste a su vez tiene un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_2$  y éste también tiene un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_1$ . El rendimiento esperado es igual para todos los portafolios. Los índices de desempeño son monótonos decrecientes  $\rho_1 > \dots > \rho_4$ . Por lo tanto, el portafolio  $\alpha_1$  tiene la medida de riesgo mínima, el mismo rendimiento esperado, y el índice de desempeño máximo. El estado de resultados del producto estructurado se presenta en la Gráfica 2.

Gráfica 2. Producto estructurado sobre una cobertura de compra al alza.

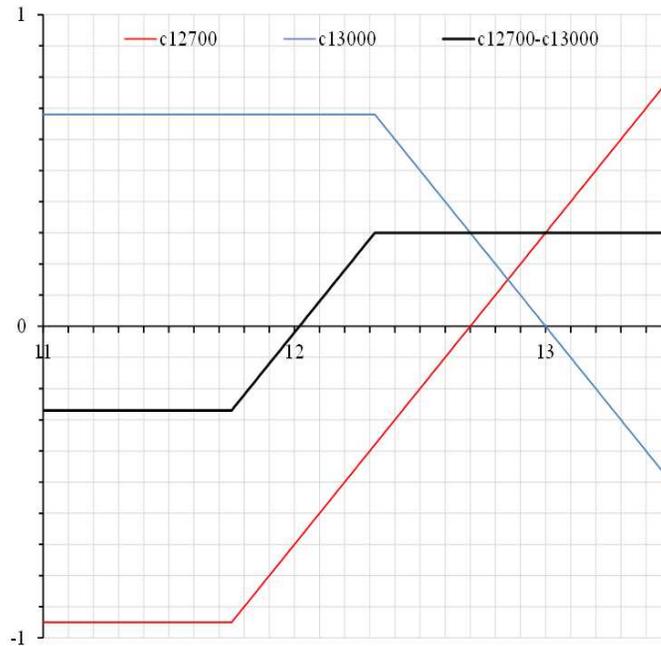


Fuente: Elaboración propia con datos del MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 4.3.3.2).

En la Gráfica 2 se observa el estado de pérdidas y ganancias del producto estructurado sobre una cobertura de compra al alza (línea negra) y el valor del bono (línea roja) a través del periodo de maduración del bono y las opciones europeas de compra  $c_{12700}$  y  $c_{13000}$ .

El producto estructurado  $c(t, F_t, B_t)$  es un instrumento de deuda con rendimiento variable equivalente al valor de mercado del bono  $B_t$  más el factor de participación de la opción  $c_{12700}(t, F_t)$  menos el factor de participación de la opción  $c_{13000}(t, F_t)$ . El producto estructurado  $c(t, F_t, B_t)$  tiene un rendimiento variable dado por la diferencia entre el factor de participación de la posición larga de la opción de compra  $c_{12700}$  y el factor de participación de la posición corta de la opción de compra  $c_{13000}$ . El estado de resultados del diferencial de compra al alza se presenta en la Gráfica 3.

Gráfica 3: Cobertura de compra al alza.



Fuente: Elaboración propia con datos del MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 4.3.3.2).

En la Gráfica 3 se observa el estado de resultados de un diferencial de compra al alza suponiendo que los precios de las opciones y los factores de influencia son constantes, la pérdida máxima es 0.27 cuando el futuro es menor que 11.7501 y la ganancia máxima es 0.30 cuando el futuro es mayor que 12.3198, las pérdidas y ganancias ocurren cuando el futuro es menor o mayor que 12.0198, respectivamente. Considerando los factores de participación, el estado de resultados puede tener mayores o menores ganancias o pérdidas con un comportamiento semejante.

#### 4.1 Producto estructurado a través de una aproximación lineal

En esta sección se emplea el modelo lineal propuesto, utilizando la primera diferencia para modelar la duración del bono y aproximar los rendimientos de las opciones. El rendimiento esperado, la medida de dispersión, y el índice de desempeño de los portafolios log-estables presentan en el Cuadro 11.

Cuadro 11. Aproximación lineal para la nota estructurada.

Subyacente	$\alpha_1 = 1.4029$	$\alpha_2 = 1.4117$	$\alpha_3 = 1.4205$	$\alpha_4 = 2.0000$
$E(\Pi)$	0.00013555	0.00013555	0.00013555	0.00013555
$\gamma_{\Pi}$	0.00003063	0.00002659	0.00002178	0.00407810
$\rho_{\Pi}$	0.38840544	0.44745450	0.54623737	0.00291712

Fuente: Elaboración propia con datos del MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 4.3.3.2).

En el Cuadro 11 se puede observar que los parámetros de escala del producto estructurado presentan un comportamiento similar al portafolio óptimo lineal  $\gamma_3 < \gamma_2 < \gamma_1 < \gamma_4$ , por lo que el portafolio log-gaussiano tiene un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_1$  y éste a su vez tiene un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_2$  y éste también tiene un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_3$ . El rendimiento esperado es igual para todos los portafolios. Los índices de desempeño son  $\rho_4 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ . Por lo tanto, el portafolio  $\alpha_3$  tiene la medida de riesgo mínima, el mismo rendimiento esperado, y el índice de desempeño máximo, es decir, tiene un comportamiento similar al portafolio óptimo lineal, pero con rendimientos esperados superiores a la tasa instantánea anual del 4.3747%.

#### 4.2 Producto estructurado a través de una aproximación cuadrática

En esta sección se emplea el modelo cuadrático utilizando la primera y la segunda diferencia para modelar la duración y la convexidad del bono, respectivamente, y aproximar los rendimientos de las opciones. El rendimiento esperado, la medida de dispersión, y el índice de desempeño de los portafolios log-estables presentan en el Cuadro 12.

Cuadro 12. Aproximación cuadrática para la nota estructurada.

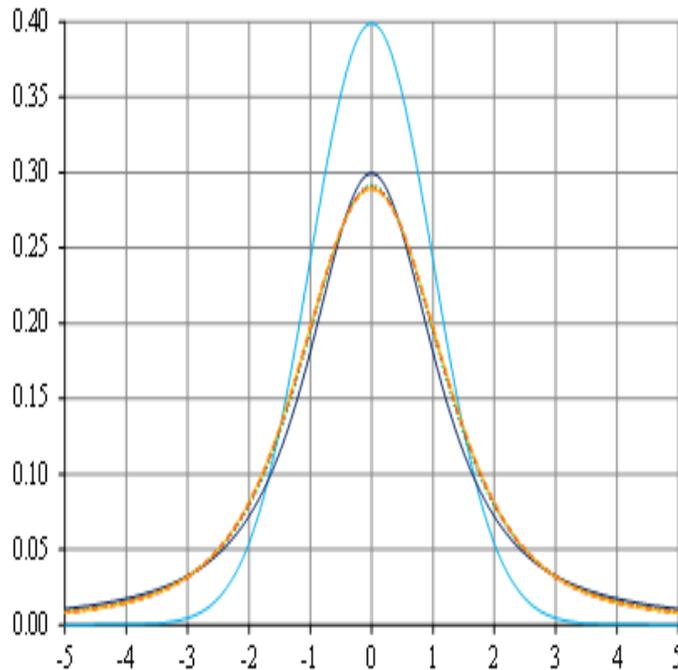
Subyacente	$\alpha_1 = 1.4029$	$\alpha_2 = 1.4117$	$\alpha_3 = 1.4205$	$\alpha_4 = 2.0000$
$E(\Pi)$	0.00013555	0.00013555	0.00013555	0.00013555
$\gamma_{\Pi}$	0.00003063	0.00002659	0.00002178	0.00407810
$\rho_{\Pi}$	0.38840544	0.44745450	0.54623737	0.00291712

Fuente: Elaboración propia con datos del MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 4.3.3.2).

En el Cuadro 12 se puede observar que los parámetros de escala del producto estructurado presentan un comportamiento similar al portafolio óptimo cuadrático  $\gamma_2 < \gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_4$ , por lo que el portafolio log-gaussiano tiene un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_3$  y éste a su vez tiene un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_1$  y éste también tiene un riesgo mayor que el portafolio  $\alpha_2$ . El rendimiento esperado es igual para todos los portafolios. Los índices de desempeño son  $\rho_4 < \rho_3 < \rho_1 < \rho_2$ . Por lo tanto, el portafolio  $\alpha_2$  tiene la medida de riesgo mínima, el mismo rendimiento esperado, y el índice

de desempeño máximo, es decir, tiene un comportamiento similar al portafolio óptimo cuadrático, pero con rendimientos esperados superiores a la tasa instantánea anual del 4.3747%. La distribución gaussiana y las distribuciones  $\alpha$ -estables se presentan en la Gráfica 4.

Gráfica 4: Distribuciones  $\alpha$ -estables.



Fuente: Elaboración propia a través de hoja de cálculo (LibreOffice 4.3.3.2).

En la Gráfica 4 se pueden observar a la distribución gaussiana estándar (línea color cielo) y las distribuciones  $S(1.2000, 0.5140)$ ,  $S(1.3587, 0.5381)$ ,  $S(1.4111, 0.4507)$  y  $S(1.4253, 0.4956)$ , respectivamente, (línea color marino, línea punteada color verde, línea discontinua color rojo y línea color naranja), donde la leptocurtosis y la asimetría positiva indican que los extremos de las distribuciones  $\alpha$ -estables son de mayor frecuencia que los de la distribución gaussiana y las modas de las distribuciones  $\alpha$ -estables están a la izquierda de la moda, media y mediana de la distribución gaussiana. La distribución gaussiana indica que eventos cercanos a la moda ocurren con mayor frecuencia de lo que realmente ocurre con los rendimientos de las opciones y también indica que los eventos lejanos a la moda (valores extremos) ocurren con menor frecuencia de lo que realmente ocurre con los rendimientos de las opciones por lo que la distribución gaussiana sobrestima eventos de bajo impacto financiero y económico y subestima eventos de alto impacto financiero y económico como ganancias o pérdidas cuantiosas.

En trabajos posteriores se puede realizar la valuación de las opciones con el modelo log-estable ortogonal propuesto por Climent-Hernández y Venegas-Martínez (2013) para modelar series financieras y económicas, estiman los

parámetros de la distribución de los rendimientos de la paridad del tipo de cambio peso-dólar a través de los métodos de máxima verosimilitud, tabulación por cuantiles de las distribuciones  $\alpha$ -estables y regresión sobre la función característica de la muestra, realizan un análisis cualitativo para mostrar la calidad del ajuste de la distribución y un análisis cuantitativo para elegir el mejor ajuste de la distribución, comparan el modelo log-estable con el modelo log-gaussiano y un vector de precios del MexDer, y muestran que el modelo log-estable presenta ventajas sobre el modelo log-gaussiano en la cuantificación de factores de riesgo como curtosis y asimetría modelando adecuadamente la dinámica de los rendimientos que presentan cúmulos de volatilidad elevada y eventos extremos que tienen un impacto financiero y económico de cuantías superiores a lo que indica la distribución log-gaussiana, presentan un análisis comparativo valuando opciones europeas a través de los modelos log-estable y log-gaussiano que muestra las diferencias en los precios de los pagos contingentes y que son criticadas en Climent-Hernández y Cruz-Matú (2016) quienes indican que la valuación log-estable es inferior para la valuación de opciones en un intervalo cercano a en dinero y superior cuando la valuación está fuera y dentro de dinero, innovando en la valuación de productos estructurados de capital garantizado de primera generación utilizando distribuciones log-estables para modelar adecuadamente la dinámica de los rendimientos (leptocurtosis, asimetría, fluctuaciones lejanas a la moda o valores extremos, propiedad de estabilidad o persistencia) con cúmulos de volatilidad elevada y considerando eventos extremos poco probables en el contexto de la distribución gaussiana que realmente tienen frecuencias superiores y un impacto financiero y económico de cuantías superiores en los mercados, lo que permite comparar la valuación de los productos estructurados a través del modelo log-estable y log-gaussiano realizar la valuación del portafolio dados los factores de participación y posteriormente estimar el VaR del portafolio con la aproximación cuadrática.

## 5. Conclusiones

La distribución conjunta log-estable presenta diferentes parámetros de estabilidad y la distribución conjunta log-gaussiana tiene un parámetro también de estabilidad único por lo que las asignaciones óptimas presentan diferencias debidas a los componentes de riesgo y leptocurtosis. Los portafolios log-estables presentan, generalmente, mayor aversión al riesgo que el portafolio log-gaussiano porque el modelo log-estable está más apegado a la realidad de los mercados. El supuesto de la distribución log-gaussiana hace que eventos de alto impacto sean considerados como eventos poco probables mientras que las distribuciones log-estables permiten conocer más apropiadamente la probabilidad de ocurrencia de los eventos de alto impacto financiero y económico y están modelados de forma más eficiente que con la distribución log-gaussiana. Los inversionistas log-estables pueden mejorar las medidas de desempeño log-gaussianas y las asignaciones óptimas son proporcionales y monótonas a los parámetros de estabilidad por lo que las asignaciones óptimas log-gaussianas son menos eficientes que las asignaciones log-estables.

Los inversionistas log-gaussianos invierten cantidades mayores en las posiciones largas con medidas de riesgo menores que en las posiciones cortas con medidas de riesgo mayores y pierden oportunidades de ganancias por

invertir cantidades mayores en la posición larga del bono y cuando invierten cantidades mayores en los activos con medidas de riesgo mayores realmente corren riesgos mayores que los inversionistas log-estables porque en realidad tienen menor aversión al riesgo que los inversionistas log-estables, prefieren menores rendimientos que riesgos de pérdidas menores porque no están considerando adecuadamente los eventos de alto impacto financiero y económico como lo hacen los inversionistas log-estables. En el caso del producto estructurado los inversionistas log-gaussianos sobrestiman las pérdidas esperadas porque no consideran las ganancias por el diferencial de compra al alza cuando el subyacente incrementa su valor, porque son eventos considerados poco probables, pero tienen un impacto financiero y económico importante. Los inversionistas log-gaussianos sobrestiman las pérdidas de bajo impacto por la posición larga del bono y de la opción (las pérdidas están acotadas al precio de emisión) y subestiman las ganancias por la posición corta de la opción (las ganancias están acotadas al precio de emisión), equivalentemente, subestiman las ganancias de alto impacto (aumentan en proporción directa con el incremento del subyacente) por la posición larga de opción y subestiman las pérdidas de alto impacto (disminuyen en proporción directa con el decremento del subyacente) por la posición corta de la opción que son casi cuatro veces menores que las ganancias por la posición larga de opción debido a los factores de participación del producto estructurado.

La aproximación cuadrática de los rendimientos del producto estructurado tiene un comportamiento similar al portafolio óptimo cuadrático e indica que la aproximación para modelar la duración, la convexidad y la no linealidad de las opciones son factores relevantes que se deben considerar porque los rendimientos y la medida de riesgo se adapta de forma eficiente a las condiciones reales de los mercados y favorecen la toma de decisiones de los inversionistas con aversión al riesgo.

Las investigaciones próximas pueden cuantificar el valor en riesgo paramétrico y el valor en riesgo condicional paramétrico para portafolios óptimos y productos estructurados a través de distribuciones log-estables.

## References

- Ciek, P., Härdle W., & Weron, R. (2005). Stable Distributions. Statistical Tools for Finance and Insurance. *Berlin, Springer*, 21-44.
- Castillo, N. & Ortiz, C. (2013). Inversiones en divisas: Optimización Media-Varianza y Valor en Riesgo, *Administración de Riesgos: Banca, Mercados y Modelos Financieros. Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco*. 4, 107-145.
- Climent-Hernández, J. & Venegas-Martínez, F. (2013). Valuación de opciones sobre subyacentes con rendimientos  $\alpha$ -estables, *Revista de Contaduría y Administración*, 58(4), 119-150.
- Climent-Hernández, J., Venegas-Martínez, F., & Ortiz-Arango, F. (2014). Portafolio óptimo y productos estructurados en mercados  $\alpha$ -estables: un enfoque de minimización de riesgo, *Working Paper, Munich Personal RePEc Archive*. Disponible en: <http://mpira.ub.uni-muenchen.de/57740/>.
- Climent-Hernández, J., Venegas-Martínez, F., & Ortiz-Arango, F. (2015). Portafolio óptimo y productos estructurados en mercados  $\alpha$ -estables: un enfoque de minimización de riesgo, *Revista Nicolaita de Estudios Económicos*, 10(2), 81-106.
- Climent-Hernández, J., & Cruz-Matú, C. (2016). Valuación de un producto estructurado de compra sobre el SX5E cuando la incertidumbre de los rendimientos está modelada con procesos estables, *Revista Contaduría y Administración*, Publicación próxima.

- Contreras, C., & Venegas-Martínez, F. (2011). Valuación de opciones sobre activos subyacentes con distribuciones estables, *Estocástica: Finanzas y Riesgo*, 1(1), 55-71.
- De Jesús R., Ortiz, C., & Cabello, A. (2010). Medición del riesgo cambiario basado en el percentil de una distribución de colas pesadas, *Administración de Riesgos: Banca, Mercados, Empresa y Modelos Financieros. Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco*. 1, 169-224.
- Dostoglou, S. & Rachev, S. (1999). Stable Distributions and Term Structure of Interest Rates, *Mathematical and Computer Modelling*, 29(10), 57-60.
- Fama, E. (1963). Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis, *Journal of Business*, 36(4), 420-429.
- Fama, E. (1965a). Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market, *Management Science*, 11(3), 404-419.
- Fama, E. (1965b). The Behavior of Stock Market Prices, *Journal of Business*, 38(1), 34-105.
- Khindanova, I., Rachev, S., & Schwartz, E. (2001). Stable Modeling of Value at Risk. *Mathematical and Computer Modelling*, 34, 1223-1259.
- López, F. (1999). Aplicación del enfoque de Markowitz al cálculo del Valor en Riesgo (VaR) a un portafolio de divisas, *Revista de Contaduría y Administración*, 193(2), 53-60.
- López, F., Ortiz, E., & De Jesús, R. (2011). Integración fraccionaria y valor en riesgo, *Estocástica: Finanzas y Riesgo*, 1(1), 29-53.
- López, F., & Ortiz, E., (2011). Medición del Valor en Riesgo en la Bolsa Mexicana de Valores y Memoria Larga, *Administración de Riesgos: Modelos y entorno financiero. Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco*. 3, 127-156.
- Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, 36(4), 394-419.
- Mandelbrot, B., & Taylor, H. (1967). On the Distribution of Stock Price Differences, *Operations Research*, 15(6), 1057-1062.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- McCulloch, J. (1986). Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 34(3), 1109-1136.
- Morgan, J. (1996). RiskMetrics-Technical Document. Fourth Edition, New York.
- Nolan, J. (1997). Parameter Estimation and Data Analysis for Stable Distributions. *Signals, Systems and Computers*, 1(2-5), 443-447.
- Nolan, J. (1998). Parameterizations and Modes of Stable Distributions. *Statistics and Probability Letters*, 38(2), 187-195.
- Nolan, J. (2011). Stable Distributions. Models for Heavy Tailed Data. Boston, Birkhauser. In progress, Chapter 1. Disponible en: <http://academic2.american.edu/~jpnolan>.
- Ortobelli, L., Huber, I., & Schwartz, E. (2002). Portfolio Selection with Stable Distributed Returns, *Mathematics Methods of Operations Research*, 55, 265-300.
- Ortobelli, L., Rachev, S., & Schwartz, E. (2004). The Problem of Optimal Asset Allocation with Stable Distributed Returns, *Stochastic Processes and Functional Analysis*, 238, 295-347.
- Ortobelli, L., Rachev, S., Stoyanov, F., Fabozzi, F., & Biglova, A. (2005a). The Proper Use of Risk Measures in Portfolio Theory, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(8), 1107-1133.
- Ortobelli, L., Biglova, A., Huber, I., Racheva, B., & Stoyanov S. (2005b). Portafolio Choice with Heavy Tailed Distributions, *Journal of Concrete and Applicable Mathematics*, 3(3), 353-376.
- Rachev, T., Huber, I., & Ortobelli, S. (2003). Portafolio Choice with Heavy Tailed Distributions. Working Paper, University of California, Santa Barbara and the Deutschen Forschungsgemeinschaft.
- Rachev, T., Ortobelli, S., & Schwartz, E. (2004). The Problem of Optimal Asset Allocation with Stable Distributed Returns, *Stochastic Processes and Functional Analysis* 238 (A. C. Krinik, R. J. Swift eds.), 295-347.
- Samorodnitsky, G., & Taqqu, M. (1994). Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance. *First edition, New York: Chapman and Hall*.

- Scalas, E., & Kim, K. (2006). The Art of Fitting Financial Time Series with Levy Stable Distributions, *Munich Personal RePEc Archive August*(336), 1-17. [mpra.ub.uni-muenchen.de/336](http://mpra.ub.uni-muenchen.de/336).
- Téllez, J., & Velázquez, O. (2010). Valor en riesgo usando valores extremos y cópulas, *Administración de Riesgos: Banca, Mercados, Empresa y Modelos Financieros, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco*. 1, 371-398.
- Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk, *The Review of Economic Studies*, 25, 65-86.
- Tokata, Y., Rachev, S., & Schwartz, E. (2003). The Stable Non-Gaussian Asset Allocation: A Comparison with the Classical Gaussian Approach, *Journal of Economic Dynamics & Control*, 27(6), 937-969.
- Venegas-Martínez, F. (2008). Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, *Cengage Learning Latin America*. Segunda edición.
- Venegas-Martínez, F. & Rodríguez-Nava, A. (2009). Consistencia entre minimización de varianza y maximización de utilidad en la evaluación de derivados, *Revista de Contaduría y Administración*, 229(3), 9-30.