



fundación de investigación

ISSN: 1665-5346

Volumen 7
Número 2
Julio-Diciembre 2012

EDITOR

Gerardo Dubcovsky

EDITORES ADJUNTOS

Myron Scholes

James Heckman

John C. Hull

Tom Copeland

Edward I. Altman

Marco Avellaneda

Aloisio Araujo

Anthony Thirlwall

James R. Barth

Fausto Hernández Trillo

José C. Ramírez Sánchez

Edgar Ortiz

Francisco López-Herrera

Francisco Venegas-Martínez

Carlos Guerrero de Lizardi

COMITÉ EJECUTIVO

José A. Quesada Palacios

Sergio F. Ruiz Olloqui Vargas

Manuel Osuna y Fernández

Emilio Illanes Díaz Rivera

Claudia E. Castillo Ramírez

Beatriz Romero Sánchez

Patrocinado por:



REVISTA MEXICANA DE ECONOMÍA Y FINANZAS

Nueva Época

REMEF

**(THE MEXICAN JOURNAL OF
ECONOMICS AND FINANCE)**

CONTENIDO:

Reacción del Mercado de Valores Mexicano ante los escándalos financieros: Evidencia empírica.

MARCELA JARAMILLO JARAMILLO Y MARÍA ANTONIA GARCÍA BENU

Sincronización de fase en los mercados internacionales de capitales, evidencia de integración.

SALVADOR CRUZ AKÉ, FERNANDO RAMÍREZ ALATRISTE Y REYNA SUSANA GARCÍA RUIZ

An Empirical Analysis of the Dimensions of Corporate Social Responsibility in Portugal.

SANDRA AFONSO, PAULA ODETE FERNANDES AND ANA PAULA MONTE

El modelo SABR y su relación con la geometría diferencial: Valuación de opciones de compra de dólares del Banco de México.

GUILLERMO SIERRA JUÁREZ

Optimización de portafolios con capital en riesgo acotado.

HUGO EDUARDO RAMÍREZ J. Y LILIANA BLANCO CASTAÑEDA

REVISTA MEXICANA DE ECONOMÍA Y FINANZAS
NUEVA ÉPOCA REMEF
(THE MEXICAN JOURNAL OF ECONOMICS AND FINANCE)

VOLUMEN 7 **NÚMERO 2** **JULIO 2012**

CONTENIDO

EDITORIAL IMEF

C.P.C. José A. Quesada Palacios (Presidente Nacional del IMEF)

REACCIÓN DEL MERCADO DE VALORES MEXICANO ANTE LOS ESCÁNDALOS FINANCIEROS: EVIDENCIA EMPÍRICA.

Marcela Jaramillo Jaramillo (Universidad Autónoma del Estado de México), María Antonia García Benau (Universidad de Valencia)(Ganador del 2do Lugar, Premio de Investigación Financiera IMEF-2010) 129

SINCRONIZACIÓN DE FASE EN LOS MERCADOS INTERNACIONALES DE CAPITALES, EVIDENCIA DE INTEGRACIÓN.

Salvador Cruz Aké (Instituto Politécnico Nacional), Reyna Susana García Ruiz (Universidad Nacional Autónoma de la Ciudad de México), Fernando Ramírez Alatríste (Universidad Nacional Autónoma de la Ciudad de México).....155

AN EMPIRICAL ANALYSIS OF THE DIMENSIONS OF CORPORATE SOCIAL RESPONSIBILITY IN PORTUGAL

Sandra Afonso (Instituto Politécnico de Bragança), Paula Odete Fernandes (Instituto Politécnico de Bragança), Ana Paula Monte (Instituto Politécnico de Bragança).....175

EL MODELO SABR Y SU RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL: VALUACIÓN DE OPCIONES DE COMPRA DE DÓLARES DEL BANCO DE MÉXICO

Guillermo Sierra Juárez (Universidad de Guadalajara).....185

OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS CON CAPITAL EN RIESGO ACOTADO

Hugo Eduardo Ramírez J. (Politécnico Grancolombiano Institución Universitaria), Liliana Blanco Castañeda (Universidad Nacional Autónoma de Colombia, Bogota.) 211

EDITORIAL IMEF

Dentro de todo gran proyecto, el reto siguiente a la inauguración o estreno público es continuar. La nueva época de la Revista Mexicana de Economía y Finanzas fortalece su consolidación en este segundo número, cuya difusión busca posicionar el alto nivel del contenido como una referencia, entre investigadores y profesionales, en el ámbito financiero, económico y empresarial.

La información, conforme se comparte, genera conocimiento y riqueza intelectual en diversos niveles de la sociedad. México, en vías de desarrollo e incremento de su competitividad, busca potencializar las variables cuyo impacto generen soluciones a las diversas problemáticas de índole nacional. Es por ello que La Fundación de Investigación del Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas, A.C. (IMEF), en alianza con PwC, aportan, en excelente medida, valor al país a través del impulso y conexión a los principales actores, mismos que nos encaminan hacia una sociedad del conocimiento.

Asimismo, la aportación de capital intelectual representa la continua evolución del acervo, dado que las publicaciones son artículos inéditos que buscan innovar, tanto teoría como práctica, a través del gran talento de sus editores e investigadores. Además, debido al bajo número de publicaciones mexicanas que se presentan en comparación con los países desarrollados, la Fundación de Investigación se suma a la intención de mejorar el nivel y transmitir la riqueza de la información generada hacia los mexicanos.

Por otro lado, en atención a las nuevas tendencias tecnológicas, la REMEF ahora podrá estar disponible a través de una plataforma digital, misma que nos acercará aún más al objetivo de posicionar el contenido con mejor dirección, es decir, extender la divulgación de publicaciones mexicanas hacia contextos globales al romper las barreras de libro impreso.

Progresar es posible gracias a todos aquellos que creen en el proyecto y continúan aportando elementos clave y de calidad; sin duda el talento es y seguirá siendo la fuente esencial de esta Revista Especializada.

C.P.C. José A. Quesada Palacios
Presidente Nacional del IMEF

OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS CON CAPITAL EN RIESGO ACOTADO

Hugo Eduardo Ramirez J.*

Politécnico Grancolombiano Institución Universitaria, Departamento de Matemáticas

Liliana Blanco Castañeda

Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Estadística

(Recibido 11 de enero 2012, aceptado 24 de mayo 2012)

Resumen

En años recientes se ha introducido en el mercado el Capital en Riesgo o CaR , por sus siglas en inglés, como medida de riesgo en reemplazo de la varianza en los problemas de selección de portafolios óptimos. En este trabajo se hizo un estudio, usando la metodología clásica de control estocástico, acerca de las consecuencias de introducir la medida de CaR en un modelo de mercado Black-Scholes simple y en un modelo de mercado de Difusión Inverso Generalizado. Se confrontaron los resultados teóricos con datos reales tomados de la Bolsa de Valores de Colombia, para el caso de Ecopetrol e Isa.

Abstract

In recent years Capital at Risk has been brought into the market as a way to minimizing risks in the replacement of the variance in optimal portfolio selection problems. A study was conducted for this work, by utilizing the classical stochastic control methodology on the consequences of using the Capital at Risk measure in a Black-Scholes simple market model and in a Generalized Inverse Diffusion market. Theoretical results were compared to data taken from bolsa de Valores de Colombia, for the cases of Ecopetrol and Isa.

Clasificación JEL: G10, G13, G11, G21, G12, E43, G14

Palabras clave: Modelo Black-Scholes, Calculo de Ito, Optimización de portafolios, Riesgo de capital, Modelo generalizado Gaussiano, Modelo Cox-Ingerson Ross, Media-Car.

* Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano Bogotá D.C. (Colombia), Calle 57 No 3-00 Este. Teléfono: 018000 180 779, Correo electrónico: hugoeram@gmail.com

1. Introducción

Una gran variedad de los problemas originados en la vida práctica pueden ser modelados a través de los procesos estocásticos; un caso particular es el modelamiento de mercados financieros, cuya historia empieza con L. Bachelier, *Théorie de la speculation* (1900), en donde se presenta un modelo del precio de las acciones en el mercado como un movimiento browniano con tendencia (Drift), pero esta forma de modelar el mercado tiene la desventaja que el movimiento browniano puede tomar valores negativos, problema que fue resuelto por Samuelson (1965) quien modeló el precio de las acciones como un movimiento browniano geométrico o exponencial del movimiento browniano.

En el ámbito financiero, parece de conocimiento común que a largo plazo la inversión en acciones es más rentable, casi seguramente, que las tarifas de inversión en bonos libres de riesgo, esto se debe a que los índices de las acciones crecen más rápido que las tarifas libres de riesgo, a pesar de la repetida ocurrencia de caídas de la bolsa. El saber convencional entonces sostiene que si la planeación es a largo plazo, se deberá invertir en acciones preferiblemente que en bonos libres de riesgo pues de esta forma se obtendrá mayor ganancia. Es por esto, que se hace necesario demostrar que existe algún portafolio razonable con una solución que soporta esta observación empírica.

La selección de portafolios tradicional, como la introdujo Markowitz (1959) y Sharpe (1964) está basada en un análisis de media-varianza, esta aproximación no puede explicar el fenómeno descrito anteriormente, pues el uso de la varianza como una medida de riesgo de una inversión nos lleva a una porción decreciente de activos de riesgo en un portafolio mientras que el horizonte de planeación aumenta.

En años recientes ciertas variantes del clásico problema de optimización de portafolio de media-varianza de Markowitz han sido sugeridas. Para lograr el objetivo nos concentraremos en el Capital en riesgo o *CaR*, por sus siglas en inglés *Capital-at-Risk*, como un reemplazo de la varianza en los problemas de selección de portafolio.

El punto crucial en la aplicación de modelos con *CaR* es la determinación de figuras confiables y precisas especialmente para casos no normales. En el documento *Optimal Portfolios with bounded capital-at-Risk* (2002) de los autores Emmet S., Klüppelberg C y Korn R. se demuestra que un reemplazo de la varianza por el *CaR*, en un modelo de tiempo continuo de Markowitz, resuelve exactamente la contradicción mencionada arriba entre los hechos empíricos y la teoría. Más aún, ellos encuentran soluciones de forma cerrada y muestran una interpretación económica de los resultados. También resaltan las consecuencias de la introducción del *CaR* como medida de riesgo en un mercado Black-Scholes simple, donde podemos obtener una solución explícita, y estudian el problema de portafolio en modelos más generales de evaluación de acciones, como prototipos de modelos para permitir mayores fluctuaciones que los modelos gaussianos, muestran difusiones de saltos y el proceso de difusión gaussiano inverso generalizado (GIG).

Entre los trabajos publicados más recientemente sobre el tema, se pueden consultar por ejemplo el trabajo de Delong L., Klüppelberg C. *Optimal investment and consumption in a Black-Scholes market with Lévy-driven stochastic*

coefficients. *Ann. Appl. Prob.* 18 (3), 879-908. del 2008, y el trabajo de Korn R., Zeytun S. *Solving optimal investment problems with structured products under CVaR constraints. Optimization* 58(3), 291-304. del 2009.

Este artículo pretende revisar la teoría para plantear los problemas de mercados financieros tomando el *CaR* como medida de riesgo, mostrando donde se pueden encontrar soluciones de forma explícita y donde se hace necesario hacer simulaciones para encontrar la solución, para finalizar el artículo presenta un estudio comparativo para las medidas de varianza y *CaR* en los modelos de Black-Scholes simple y el modelo de difusión gaussiano inverso generalizado. El artículo esta distribuido de la siguiente manera: En la sección 2 encontraremos una pequeña introducción a la teoría de finanzas matemáticas, luego, en la sección 3 revisaremos el problema de optimización de portafolios bajo una restricción de *CaR*, en la sección 4 se generaliza a unos procesos con colas más pesadas como lo son los procesos de difusión y se estudia el problema de optimización de portafolios con restricción de *CaR* para un proceso de precios de acciones dado por un proceso de difusión gaussiano inverso generalizado, en la sección 5 se realizan unas simulaciones en las que se soluciona el problema de media-*CaR* para el modelo de Cox-Ingersoll-Ross y se replican los precios de acciones reales haciendo uso de los históricos de las empresas Ecopetrol e Isa de la bolsa de valores de Colombia, los datos son replicados para los modelos de Black-Scholes y modelo de difusión GIG, y finalmente se hace una proyección a futuro.

2. Formulación del problema

Trabajaremos en un mercado financiero que consiste de un bono y una acción, partiendo del modelo de Black-Scholes tenemos que para un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ y B_t un movimiento browniano estándar con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. La evolución de los precios del bono y la acción están dados por

$$P_0(t) = p_0 \exp \left(\int_0^t r ds \right) \quad \mathbf{Bono} \quad (1)$$

$$P_1(t) = p_1 \exp \left(\int_0^t \left(b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \int_0^t \sigma dB(s) \right) \quad \mathbf{Acción} \quad (2)$$

para $t \in [0, T]$. Los coeficientes constantes r, b, σ representan la tasa de interés del bono, la tasa de interés de la acción y la varianza.

El **mercado** es el proceso estocástico 2-dimensional dado por $P_t = P(t) = (P_0(t), P_1(t))$.

Un **portafolio** en el mercado P_t es un proceso estocástico medible y \mathcal{F}_t adaptado $\pi(t) = \pi_t$ y representa el porcentaje del capital que ha sido invertido en la acción. El porcentaje de capital invertido en el bono se denota $\pi_0(t)$. Además $\pi_0(t) = 1 - \pi(t)$, lo que quiere decir que no aceptamos sobranes de dinero.

El **valor del portafolio** $\pi(t)$ es

$$V^\pi(t) = \pi_0(t)P_0(t) + \pi(t)P_1(t) \quad (3)$$

y un portafolio se dice **admisible**, si su valor $V^\pi(t)$ está acotado por debajo.

La ecuación de capital, que representa el capital inicial más las ganancias o pérdidas, correspondiente a este modelo es

$$dX(t) = \pi_0(t)X(t)r dt + X(t)\pi(t)b dt + X(t)\pi(t)\sigma dB(t)$$

y usando que $\pi_0(t) = 1 - \pi(t)$ tenemos

$$\begin{aligned} dX(t) &= (1 - \pi(t))X(t)r dt + X(t)\pi(t)b dt + X(t)\pi(t)\sigma dB(t) \\ dX(t) &= X(t)r dt - \pi(t)X(t)r dt + X(t)\pi(t)b dt + X(t)\pi(t)\sigma dB(t) \quad (4) \\ dX(t) &= X(t)(r + \pi(t)(b - r)) dt + X(t)\pi(t)\sigma dB(t). \end{aligned}$$

Haciendo uso de las metodologías de control estocástico y la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, conocemos el portafolio que optimiza el valor esperado de la riqueza, cuando la función de utilidad está dada como una función de HARA, tal como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *El problema de portafolio*

$$\max_{\pi(t) \in \mathcal{A}} E \left[\frac{1}{\gamma} X^\pi(T)^\gamma \right] \quad (5)$$

donde $X^\pi(t)$ representa el capital en el tiempo t correspondiente al portafolio $\pi(t)$ y \mathcal{A} representa el conjunto de portafolios admisibles con valor esperado finito. Es resuelto por la estrategia $\pi^*(t)$ dada por

$$\pi^*(t) = \frac{1}{\gamma - 1} \sigma^{-2} (b - r).$$

Observación. Note que $\pi(t)$, en realidad no depende del tiempo siempre b, r, σ no lo hagan, por eso de aquí en adelante el portafolio se notará π .

El problema considerado por Markowitz en términos del proceso de capital $X^\pi(t)$, trata de obtener un portafolio π cuyo valor esperado terminal del proceso de capital sea el máximo posible, minimizando el riesgo en que se incurre al invertir en las acciones, este riesgo es medido mediante la varianza de $X^\pi(t)$ es decir:

$$\max_{\pi} E[X^\pi(T)] \quad \text{sujeto a} \quad \text{Var}(X^\pi(T)) \leq C \quad (6)$$

y usando que

$$\text{Var}(X^\pi(T)) = x^2 \exp \{2(\pi(b - r) + r)T\} \left(e^{(\pi\sigma)^2 T} - 1 \right)$$

se puede ver que la varianza es una función creciente (con respecto al tiempo T), lo que quiere decir que mientras más largo sea el horizonte de tiempo, más grande también será la varianza (es decir mayor el riesgo) y restringirá la opción de escoger acciones riesgosas aunque el valor esperado terminal sea mayor.

3. Problema de optimización de portafolios con restricción de CaR

En esta sección cambiaremos la restricción de varianza en el modelo de Markowitz por una restricción de Capital en Riesgo y revisaremos que es factible encontrar una portafolio que no restringe las inversión en acciones riesgosas a largo plazo.

Recordemos que la solución de la ecuación de riqueza es

$$X^\pi(t) = x \exp \left\{ \left(\pi(b-r) + r - \frac{(\pi\sigma)^2}{2} \right) t + \pi\sigma B_t \right\} \quad (7)$$

donde b es la tasa de interés de la acción y r tasa de interés del bono.

A partir de esto definimos

Definición. Sea x el capital inicial, T un tiempo final dado y sea z_α el α -cuantil¹ de la distribución normal estándar. Para un portafolio $\pi \in \mathbb{R}$ con capital final $X^\pi(T)$, el α -cuantil de $X^\pi(T)$ se define como sigue:

$$\rho(x, \pi, T) = x \exp \left\{ \left(\pi(b-r) + r - \frac{(\pi\sigma)^2}{2} \right) T + z_\alpha \pi \sigma \sqrt{T} \right\}$$

y

Definición. El capital en riesgo del portafolio π con capital inicial x y tiempo final o tiempo de horizonte T está definido por:

$$\begin{aligned} CaR(x, \pi, T) &= xe^{rT} - \rho(x, \pi, T) \\ &= xe^{rT} \left(1 - \exp \left\{ \left(\pi(b-r) - \frac{(\pi\sigma)^2}{2} \right) T + z_\alpha \pi \sigma \sqrt{T} \right\} \right). \end{aligned}$$

Observación. En la definición del CaR vamos a asumir en general que $\alpha < 0,5$ de esta forma aseguraremos que $z_\alpha < 0$.

Observación. En el marco de las posibles pérdidas (de la inversión) en un periodo de tiempo T , el CaR representa una cota superior para las posibles pérdidas comparadas con la inversión en bonos, es decir que el α por ciento de las pérdidas superarán el CaR .

En lo que sigue usaremos la notación $f(\pi)$ para:

$$f(\pi) = z_\alpha |\pi\sigma| \sqrt{T} - |\pi\sigma|^2 \frac{T}{2} + \pi(b-r)T \quad \pi \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

¹ El cuantil es el valor z_α bajo el cual se concentra el α por ciento de la población, así por ejemplo si X es una variable aleatoria normal estándar y $\alpha = 0,5$ tenemos que $z_\alpha = 0$

De la definición del *CaR*, asumiendo $z_\alpha < 0$ y usando que $\sup_{y \in \mathbf{R}} \{1 - e^y\} = 1$, se puede ver que el máximo *CaR* es:

$$\sup_{\pi \in \mathbf{R}} CaR(x, \pi, T) = \sup_{\pi \in \mathbf{R}} \left\{ x e^{rT} \left(1 - e^{f(\pi)} \right) \right\} = x e^{rT}.$$

Es decir que el uso de estrategias extremadamente riesgosas (cuando el valor $|\pi\sigma|$ es muy grande) nos pueden llevar a un *CaR* que está cercano al capital total, por el contrario el cálculo del *CaR* mínimo está hecho en la siguiente proposición.

Proposición 3.1 . Sea $\theta = |\sigma^{-1}(b - r)|$

- 1 . Si $b = r$, entonces $f(\pi)$ alcanza su máximo en $\pi^* = 0$ y nos lleva a un mínimo capital en riesgo $CaR(x, \pi^*, T) = 0$.
- 2 . Si $b \neq r$ y $\theta\sqrt{T} < |z_\alpha|$, entonces el *CaR* mínimo es igual a 0 y es alcanzado en estrategias puras de bonos ($\pi^* = 0$).
- 3 . Si $b \neq r$ y $\theta\sqrt{T} \geq |z_\alpha|$, entonces el *CaR* mínimo se alcanza para

$$\pi^* = \left(\theta - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}} \right) \left(\frac{\sigma^{-2}(b - r)}{|\sigma^{-1}(b - r)|} \right) \quad (9)$$

con

$$CaR(x, \pi^*, T) = x e^{rT} \left(1 - e^{\frac{1}{2}(\theta\sqrt{T} - |z_\alpha|)^2} \right) \quad (10)$$

Demostración.

- 1 . Si $b = r$ entonces

$$f(\pi) = z_\alpha |\pi\sigma| \sqrt{T} - |\pi\sigma|^2 \frac{T}{2}$$

y como $z_\alpha < 0$ y $T > 0$, entonces $f(\pi) \leq 0$ y el máximo de $f(\pi)$ se alcanza cuando $|\pi\sigma| = 0$ y como σ es una constante y diferente de cero, tenemos que $\pi^* = 0$ lo que conlleva a que $f(\pi^*) = 0$ y

$$CaR(x, \pi^*, T) = e^{rT} \left(1 - e^{f(\pi^*)} \right) = 0.$$

- 2 . Si $b \neq r$. Maximicemos $f(\pi)$ sobre todos los valores que cumplan

$$|\pi\sigma| = \epsilon \quad (11)$$

para un ϵ fijo y positivo. En los puntos que cumplen (11) la función (8) se convierte en

$$f(\pi) = z_\alpha \epsilon \sqrt{T} - \epsilon^2 \frac{T}{2} + \pi(b - r)T. \quad (12)$$

Entonces el problema ahora es maximizar una función lineal (en π) sobre la condición de frontera (11), así usando el método de multiplicadores de Lagrange tenemos

$$g(\pi) = |\pi\sigma| = \sqrt{(\pi\sigma)^2}$$

que por practicidad tomaremos como

$$g(\pi) = (\pi\sigma)^2$$

con condición de frontera

$$|\pi\sigma| = \epsilon$$

por lo que tenemos

$$\nabla f = (b - r)T \quad \text{y} \quad \nabla g = 2\pi\sigma^2$$

igualando y usando el multiplicador de Lagrange λ , resulta

$$(b - r)T = 2\lambda\sigma^2\pi$$

y obtenemos

$$\pi = \frac{\sigma^{-2}(b - r)T}{2\lambda}$$

reemplazando este valor en la condición de frontera (11) (con $\frac{\epsilon}{2}$) se obtiene:

$$\left| \frac{(\sigma^{-2}(b - r)T)}{\lambda} \sigma \right| = \epsilon$$

$$|(b - r)\sigma^{-1}| T = \lambda\epsilon$$

entonces

$$\lambda = \frac{|\sigma^{-1}(b - r)| T}{\epsilon}$$

y el valor de π crítico, para un ϵ dado (notado π_ϵ^*), es

$$\pi_\epsilon^* = \epsilon \frac{\sigma^{-2}(b - r)}{|\sigma^{-1}(b - r)|}$$

si reemplazamos π_ϵ^* en $f(\pi)$ obtenemos

$$\begin{aligned} f(\pi_\epsilon^*) &= z_\alpha \epsilon \sqrt{T} - \epsilon^2 \frac{T}{2} + \left(\epsilon \frac{\sigma^{-2}(b - r)}{|\sigma^{-1}(b - r)|} \right) (b - r)T \\ f(\pi_\epsilon^*) &= z_\alpha \epsilon \sqrt{T} - \epsilon^2 \frac{T}{2} + \epsilon \frac{(\sigma^{-1}(b - r))^2}{|\sigma^{-1}(b - r)|} T \\ f(\pi_\epsilon^*) &= z_\alpha \epsilon \sqrt{T} - \epsilon^2 \frac{T}{2} + \epsilon |\sigma^{-1}(b - r)| T \\ f(\pi_\epsilon^*) &= z_\alpha \epsilon \sqrt{T} - \epsilon^2 \frac{T}{2} + \epsilon \theta T \\ f(\pi_\epsilon^*) &= -\epsilon^2 \frac{T}{2} + \epsilon(\theta T - |z_\alpha| \sqrt{T}) \end{aligned} \tag{13}$$

Como para todo $\pi \in \mathbb{R}$ se satisface $|\pi\sigma| = \epsilon$, escogiendo un valor adecuado de ϵ (puesto que $\sigma \neq 0$), obtenemos la estrategia de *CaR* mínima, maximizando $f(\pi_\epsilon^*)$ sobre todos los valores de $\epsilon \geq 0$.

Como tenemos que $f(\pi_\epsilon^*)$ es una parábola en ϵ que abre hacia abajo. Tratamos los siguientes dos casos:

- a) Si $\theta\sqrt{T} < |z_\alpha|$, el máximo de $f(\pi_\epsilon^*)$ se alcanza en un valor negativo, pero como tenemos la restricción $\epsilon \geq 0$, entonces el máximo está en $\epsilon = 0$ por lo que $\pi_\epsilon^* = 0$ y la estrategia óptima es la pura en bonos.
- b) Si $\theta\sqrt{T} \geq |z_\alpha|$, el máximo se alcanza en $\frac{\theta T - |z_\alpha|\sqrt{T}}{T} = \theta T - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}} = \epsilon^*$. Por lo que se tiene

$$\pi_\epsilon^* = \left(\theta T - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}} \right) \frac{\sigma^{-2}(b-r)}{|\sigma^{-1}(b-r)|}$$

la función $f(\pi_\epsilon^*)$ queda

$$\begin{aligned} f(\pi_\epsilon^*) &= -\left(\theta - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}} \right)^2 \frac{T}{2} + \left(\theta - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}} \right) (\theta T - |z_\alpha|\sqrt{T}) \\ &= \frac{1}{2} (\theta\sqrt{T} - |z_\alpha|)^2 \end{aligned}$$

y

$$CaR(x, \pi^*, T) = xe^{rT} \left(1 - e^{\frac{1}{2}(\theta\sqrt{T} - |z_\alpha|)^2} \right).$$

Observación. El numeral 1. nos dice que si la tasa de interés del activo riesgoso y el bono son iguales es mejor invertir todo en bonos y evitar el capital en riesgo.

Observación. La parte (3) del teorema confirma el hecho que, si el activo riesgoso tiene una tasa media de retorno diferente de la tasa sin riesgo ($b \neq r$) implica la existencia de una estrategia de acción y bono con un *CaR* negativo, mientras el tiempo T sea suficientemente grande. Entonces si el *CaR* fuera el único criterio para juzgar una estrategia de inversión, la estrategia pura de bonos no sería óptima cuando el horizonte de tiempo es grande. Por otro lado, esto muestra una gran diferencia entre el comportamiento del *CaR* y la varianza como medidas del riesgo, ya que las inversiones puras en bonos serán óptimas con respecto a la varianza.

Recordemos el problema de optimización de media-varianza, en el cual se maximiza la media con una restricción sobre la varianza, si reemplazamos la medida del riesgo de la varianza por el *CaR* obtenemos el problema de media-*CaR*, es decir

$$\max_{\pi \in \mathbb{R}} E(X^\pi(T)) \quad \text{sujeto a} \quad CaR(x, \pi, T) \leq C \quad (14)$$

donde C es una constante y asumimos $C \leq xe^{rT}$.

Ahora calcularemos el portafolio que maximiza el valor esperado del capital, teniendo en cuenta que el *CaR* sea menor que una constante.

Proposición 3.2 Sea $\theta = |\sigma^{-1}(b - r)|$ y supongamos que $b \neq r$. Más aún se asume que C satisface

$$0 \leq C \leq xe^{rT} \quad \text{si} \quad \theta\sqrt{T} < |z_\alpha| \tag{15}$$

$$xe^{rT} \left(1 - e^{\frac{1}{2}(\theta\sqrt{T} - |z_\alpha|)^2}\right) \leq C \leq xe^{rT} \quad \text{si} \quad \theta\sqrt{T} \geq |z_\alpha| \tag{16}$$

Entonces el problema de media-CaR se resuelve por

$$\pi^* = \epsilon^* \frac{\sigma^{-2}(b - r)}{|\sigma^{-1}(b - r)|}$$

con

$$\epsilon^* = \left(\theta + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}}\right) + \sqrt{\left(\theta + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}}\right)^2 - 2\frac{c}{T}}$$

donde $c = \ln\left(1 - \frac{C}{x}e^{-rT}\right)$. La riqueza esperada maximal correspondiente a la condición de CaR es

$$E[X^\pi(T)] = xe^{(r+\epsilon^*\theta)T}.$$

Observación. Los requerimientos (15) y (16) en C nos dicen que la condición del CaR en (14) no puede ser ignorada pues C se encuentra entre los valores máximo y mínimo del CaR, calculados anteriormente.

Demostración. Recordemos que en el conjunto $|\pi\sigma| = \epsilon$ la función lineal $(b - r)\pi T$ se maximiza con

$$\pi_\epsilon = \epsilon \frac{\sigma^{-2}(b - r)}{|\sigma^{-1}(b - r)|} \tag{17}$$

entonces, si hay un portafolio π admisible para el problema (14) con $|\pi\sigma| = \epsilon$ entonces, en particular, π_ϵ debe ser admisible; es más dada la forma explícita de X^π para la riqueza esperada terminal, π_ϵ también maximiza la riqueza esperada terminal en el conjunto $|\pi\sigma| = \epsilon$.

Además para todo π admisible con $|\pi\sigma| = \epsilon$, reemplazando en el problema (14), se tiene que

$$xe^{rT} \left(1 - e^{f(\pi)}\right) \leq C$$

y despejando

$$\begin{aligned} 1 - e^{f(\pi)} &\leq \frac{C}{x}e^{-rT} \\ e^{f(\pi)} &\geq 1 - \frac{C}{x}e^{-rT} \\ f(\pi) &\geq \ln\left(1 - \frac{C}{x}e^{-rT}\right) \end{aligned}$$

usando la ecuación (12) y reemplazando por el valor c

$$\begin{aligned} \epsilon z_\alpha \sqrt{T} - \epsilon^2 \frac{T}{2} + (b - r)\pi T &\geq c \\ (b - r)\pi T &\geq c + \frac{1}{2}\epsilon^2 T - z_\alpha \epsilon \sqrt{T} \end{aligned} \tag{18}$$

En consecuencia, para obtener π que resuelva el problema de media-*CaR* (14) basta considerar todos los valores π_ϵ para todos los ϵ positivos y que satisfagan la condición (18). Así que reemplazando π_ϵ en la parte izquierda de (18) tenemos

$$\begin{aligned}(b-r)\pi_\epsilon T &= (b-r) \left(\epsilon \frac{\sigma^{-2}(b-r)}{|\sigma^{-1}(b-r)|} \right) T \\ &= \epsilon \left(\frac{(b-r)\sigma^{-1}\sigma^{-1}(b-r)}{|\sigma^{-1}(b-r)|} \right) T\end{aligned}$$

por lo que

$$(b-r)\pi_\epsilon T = \epsilon |\sigma^{-1}(b-r)| T \quad (19)$$

la cual es una función lineal creciente en ϵ y es igual a 0 cuando $\epsilon = 0$. Entonces, solucionamos el problema (14) determinando el ϵ positivo más grande tal que la condición (18) siga siendo válida, haciendo uso de la maximalidad de π_ϵ vemos que la parte derecha de la ecuación (19) es mayor que la parte derecha de (18), la cual crece hasta llegar a su mayor valor posible que está en la intersección de estas ecuaciones y por lo tanto está dada por

$$\epsilon \theta T = c + \frac{1}{2} \epsilon^2 T - z_\alpha \epsilon \sqrt{T}$$

es decir

$$\frac{1}{2} \epsilon^2 T + (-z_\alpha \sqrt{T} - \theta T) \epsilon + c = 0$$

lo que solucionamos usando la fórmula cuadrática en ϵ

$$\epsilon = \frac{(z_\alpha \sqrt{T} + \theta T) \pm \sqrt{(z_\alpha \sqrt{T} + \theta T)^2 - 2cT}}{T}$$

tomando el valor positivo de ϵ tenemos

$$\epsilon^* = \left(\theta + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}} \right) + \sqrt{\left(\theta + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}} \right)^2 - \frac{2c}{T}}$$

e insertando π^* en la ecuación de riqueza nos queda

$$\begin{aligned}E \left[X^{\pi^*}(T) \right] &= x e^{(r+(\pi^*)^{tr}(\bar{b}-\bar{r}))T} \\ &= x e^{(r+\epsilon^*\theta)T}.\end{aligned}$$

Como, para un T grande, el *CaR* es decreciente y la varianza creciente, mientras más grande sea el horizonte de tiempo mayor será el ϵ^* (correspondiente a la medida de *CaR*) por lo que se aumentará la fracción de activos riesgosos en el problema de media-*CaR* en el portafolio óptimo π^* . Además nos damos cuenta que π^* es el portafolio que sustenta la observación empírica enunciada en la introducción.

4. Problema de media-CaR para un modelo de difusión GIG

En la teoría de la probabilidad, la distribución gaussiana inversa generalizada GIG es una familia de distribuciones continuas de tres parámetros (ψ, χ, λ) con función de densidad

$$h(x) = \frac{(\chi/\psi)^{\lambda/2}}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} x^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\chi x + \frac{\psi}{x}\right)\right\} \tag{20}$$

donde K_λ es la función de Bessel de tercer tipo.

Los modelos de difusión están dados por procesos estocásticos $(X_t)_{t \geq 0}$, que son solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad t > 0, \quad X_0 = x \tag{21}$$

donde $(B_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano estándar, μ es la tendencia y σ el coeficiente de difusión o volatilidad. En esta sección vamos a considerar las siguientes ecuaciones, la cuales determinan un mercado general de difusiones

$$\begin{aligned} dP_0(t) &= P_0(t)r dt, & P_0(0) &= 1, \\ dP(t) &= P(t)(b dt + dY(t)), & P(0) &= p, \\ Y(t) &= U(t) - u, & Y(0) &= 0 \end{aligned}$$

donde $U(t)$ (parte aleatoria del proceso del activo riesgoso) se modela con un proceso GIG. En la ecuación diferencial estocástica (21), se tomará el caso especial de $\sigma(x) = \sigma x^\gamma$ para $\sigma > 0$ y $\gamma \geq \frac{1}{2}$, por lo que el proceso de difusión GIG es

$$dU(t) = \frac{1}{4}\sigma^2 U^{2\gamma-2}(t) (\psi + 2(2\gamma + \lambda - 1)U(t) - \chi U^2(t)) dt + \sigma U^\gamma(t) dB(t) \tag{22}$$

donde $U(0) = u > 0$. El proceso de precios para este caso es

$$\begin{aligned} P(t) &= p \exp\left\{bt + \frac{1}{4}\sigma^2 \int_0^t U^{2\gamma-2}(s) (\psi + 2(2\gamma + \lambda - 1)U(s) - \chi U^2(s)) ds\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{\sigma \int_0^t U^\gamma(s) dB(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t U^{2\gamma}(s) ds\right\} \end{aligned} \tag{23}$$

Para describir el proceso de riqueza necesitaremos un propiedad que se enuncia en el siguiente lema

Lema 4.1 *Sea $U(t)$ un proceso de difusión GIG dado por (22) y π un portafolio con $\pi > 0$, entonces el proceso $\tilde{U} = \pi U$ es nuevamente un proceso de difusión GIG con $\tilde{U}(0) = \pi U(0)$ y parámetros*

$$\tilde{\sigma} = \sigma \pi^{1-\gamma} \quad \tilde{\psi} = \psi \pi \quad \tilde{\chi} = \frac{\chi}{\pi}$$

Los parámetros γ y λ se mantienen iguales.

Observación. Como consecuencia del anterior lema, el proceso de riqueza tiene una forma explícita. De hecho es muy similar a la forma del proceso de precios del activo P

$$X^\pi(t) = x \exp \left\{ (1 - \pi)rt + \tilde{b}t + \tilde{Y}(t) - \frac{1}{2}[\tilde{Y}, \tilde{Y}]_t \right\}, \quad t \geq 0, \quad (24)$$

donde $[\tilde{Y}, \tilde{Y}]_t$ representa el proceso de variación cuadrática de \tilde{Y}_t y

$$\tilde{b} = \pi b \quad \text{y} \quad \tilde{Y}(t) = \tilde{U}(t) - \pi u, \quad t \geq 0$$

para cualquier portafolio positivo $\pi \geq$

El siguiente teorema nos dice que el problema de media-*CaR* tiene solución, aunque encontrarla no es una tarea fácil.

Teorema 4.2 *Asumamos que $U(T)$ y $\tilde{U}(T)$ son distribuciones GIG con parámetros ψ, χ, λ y $\tilde{\psi}, \tilde{\chi}, \lambda$ respectivamente (es decir que tienen las distribuciones estacionarias de los procesos U y \tilde{U} respectivamente). Asumamos que π es un portafolio positivo. Entonces $X^\pi(T)$ tiene media finita si $\tilde{\chi} = \chi/\pi > 2$*

Demostración Como \tilde{U} siempre es positivo, estimamos

$$X^\pi(T) \leq x \exp \left\{ (1 - \pi)rT + \tilde{b}T + \tilde{U}(T) - \pi u \right\}$$

y como, $E \left[\exp \left\{ \tilde{U}(T) \right\} \right] < \infty$ implica que $E[X^\pi(T)] < \infty$, demostraremos solamente que la primera expresión es finita. Usando la función de densidad $h(x)$ de una GIG dada por (20) tenemos que

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left\{ \tilde{U}(T) \right\} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{u\} dh(u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{u\} \frac{\left(\tilde{\chi}/\tilde{\psi}\right)^{\lambda/2}}{2K_\lambda \left(\sqrt{\tilde{\chi}\tilde{\psi}}\right)} u^{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{\tilde{\chi}u + \frac{\tilde{\psi}}{u}}{2} \right\} du \\ &= \frac{\left(\tilde{\chi}/\tilde{\psi}\right)^{\lambda/2}}{2K_\lambda \left(\sqrt{\tilde{\chi}\tilde{\psi}}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} u^{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{\tilde{\chi}u + \frac{\tilde{\psi}}{u} - 2u}{2} \right\} du \\ &= \left(\frac{\left((\tilde{\chi} - 2)/\tilde{\psi}\right)^{\lambda/2} 2K_\lambda \left(\sqrt{\tilde{\psi}(\tilde{\chi} - 2)}\right)}{2K_\lambda \left(\sqrt{\tilde{\psi}(\tilde{\chi} - 2)}\right) \left((\tilde{\chi} - 2)/\tilde{\psi}\right)^{\lambda/2}} \right) \frac{\left(\tilde{\chi}/\tilde{\psi}\right)^{\lambda/2} 2K_\lambda \left(\sqrt{\tilde{\psi}(\tilde{\chi} - 2)}\right)}{2K_\lambda \left(\sqrt{\tilde{\chi}\tilde{\psi}}\right) \left((\tilde{\chi} - 2)/\tilde{\psi}\right)^{\lambda/2}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left((\tilde{\chi} - 2)/\tilde{\psi}\right)^{\lambda/2}}{2K_\lambda \left(\sqrt{\tilde{\psi}(\tilde{\chi} - 2)}\right)} u^{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{(\tilde{\chi} - 2)u + \frac{\tilde{\psi}}{u}}{2} \right\} du \end{aligned}$$

como la integral está aplicada a la función de densidad de una *GIG* como en (20), con parámetros $\lambda, \tilde{\chi} - 2, \tilde{\psi}$, tenemos que su valor es 1 y por lo tanto

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left\{ \tilde{U}(T) \right\} \right] &= \frac{(\tilde{\chi}/\tilde{\psi})^{\lambda/2} 2K_{\lambda} \left(\sqrt{\tilde{\psi}(\tilde{\chi} - 2)} \right)}{2K_{\lambda} \left(\sqrt{\tilde{\chi}\tilde{\psi}} \right) \left((\tilde{\chi} - 2)/\tilde{\psi} \right)^{\lambda/2}} \\ &= \frac{(\tilde{\chi}/\tilde{\psi})^{\lambda/2} K_{\lambda} \left(\sqrt{\tilde{\psi}(\tilde{\chi} - 2)} \right)}{\left((\tilde{\chi} - 2)/\tilde{\psi} \right)^{\lambda/2} K_{\lambda} \left(\sqrt{\tilde{\chi}\tilde{\psi}} \right)} \\ &= \left(\frac{\tilde{\chi} - 2}{\tilde{\chi}} \right)^{-\lambda/2} \frac{K_{\lambda} \left(\sqrt{\tilde{\psi}\tilde{\chi}(1 - 2/\tilde{\chi})} \right)}{K_{\lambda} \left(\sqrt{\tilde{\chi}\tilde{\psi}} \right)} \end{aligned}$$

usando que $\tilde{\psi} = \psi\pi$ y que $\tilde{\chi} = \chi/\pi$ obtenemos

$$E \left[\exp \left\{ \tilde{U}(T) \right\} \right] = \frac{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi(1 - 2/\tilde{\chi})})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})(1 - 2/\tilde{\chi})^{\lambda/2}}$$

donde K_{λ} es una función generalizada de Bessel de tercer tipo, entonces se tiene que la parte derecha de la ecuación anterior es finita siempre que $\tilde{\chi} > 2$.

Si el parámetro original satisface $\chi > 2$ y $\pi \in [0, 1]$, entonces $\tilde{\chi} > 2$ y en este caso X^{π} tiene media finita, además el problema de media-*CaR* está bien definido y puede ser resuelto, aunque no debemos esperar una solución analítica.

5. Simulaciones y aplicaciones.

En esta sección haremos dos simulaciones que corroboran la teoría mostrada en el documento, además de ayudarnos al entendimiento de dicha teoría.

Las simulaciones son:

- 1 . Simulación de la solución del problema de media-*CaR* para el modelo de Cox-Ingersoll-Ross, el objetivo es encontrar una solución al problema pues no se tiene una solución explícita.
- 2 . Ejemplo de simulaciones para replicar datos reales de acciones de Eco-petrol e Isa.

5.1 Modelo generalizado de Cox-Ingersoll-Ross.

A continuación haremos una simulación para solucionar el problema de media-*CaR* considerando el modelo generalizado de Cox-Ingersoll-Ross, es decir el modelo de mercado *GIG* con parámetros $\gamma = 1, \chi = 0$. Por lo que, para el

modelo de Cox-Ingersoll-Ross, de (22) obtenemos la siguiente ecuación para $dU(t)$

$$dU(t) = \frac{1}{4}\sigma^2 (\psi + 2(1 + \lambda)U(t)) dt + \sigma U(t)dB(t)$$

y se soluciona como una ecuación diferencial estocástica lineal, obteniendo como resultado

$$U(t) = \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2\lambda t + \sigma B(t)\right\} \left(u + \frac{1}{4}\sigma^2\psi \int_0^t \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda s - \sigma B(s)\right\} ds\right) \quad (25)$$

y en este caso particular el proceso de precios es

$$P(t) = p \exp\left\{bt + \sigma \int_0^t U(s)dB(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t U^2(s)ds\right\}$$

Una solución explícita del problema media-*CaR* no parece posible, por eso vamos a simular la solución y usar aproximaciones numéricas.

Usaremos el siguiente algoritmo para solucionar el problema de media-*CaR*:

Para un N grande tomamos $i = 1, \dots, N$:

- 1 . Simulamos muestras de caminos $(B_i(t))_{t \in [0, T]}$ para el movimiento browniano $(B(t))_{t \in [0, T]}$
- 2 . Computamos las realizaciones $U_i(T)$ y $\int_0^T U_i^2(t)dt$ de los procesos $U(T)$ y $\int_0^T U^2(t)dt$ respectivamente, con cada uno de los caminos $(B_i(t))_{t \in [0, T]}$.
- 3 . Para “todos” los $\pi \in R$ computamos

$$Z_i^\pi(T) = \pi U_i(T) - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2 \int_0^T U_i^2(t)dt - \pi u$$

lo que corresponde a la parte aleatoria del proceso de riqueza.

- 4 . Usamos los estimadores $\hat{\mu}(\pi)$ y $\hat{\nu}(x, \pi, T)$ respectivamente para $E[X^\pi(T)]$ y $CaR(x, \pi, T)$ de la siguiente manera:

$$\hat{\mu}(\pi) := \frac{x}{N} \sum_{i=1}^N \exp\left\{(r + (b + r)\pi)T + \tilde{Z}_i^\pi(T)\right\}$$

$$\hat{\nu}(x, \pi, T) := x e^{rT} (1 - \exp\{\pi(b - r)T + \tilde{z}_\alpha(\pi)\})$$

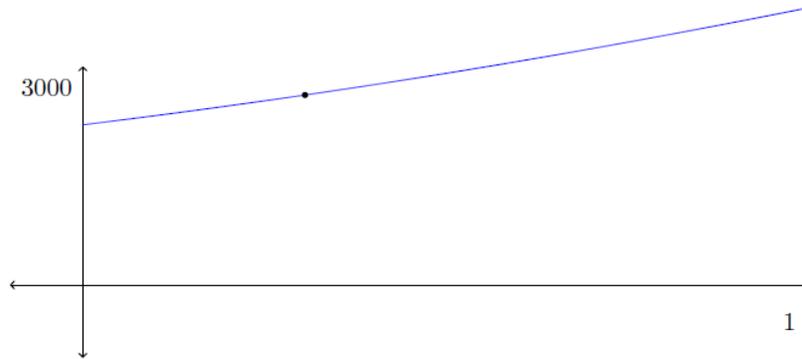
donde \tilde{z}_α es el α -cuantil de la distribución empírica de $\tilde{Z}_i^\pi(T)$.

- 5 . Finalmente escogemos el portafolio π con el mayor valor para $\hat{\mu}(\pi)$ y tal que $\hat{\nu}(x, \pi, T)$ está por debajo de una cota C para el *CaR*.

A continuación veremos unas gráficas resultado de la simulación para los parámetros $T = 10.0$, $M = 1000.0$, $N = 100.0$, $x = 1000.0$, $r = 0.05$, $b = 0.10$, $\psi = 4$, $\lambda = 0$, $\sigma = 0.05$, $u = 5$, $\alpha = 0.01$ y $C = 500$.

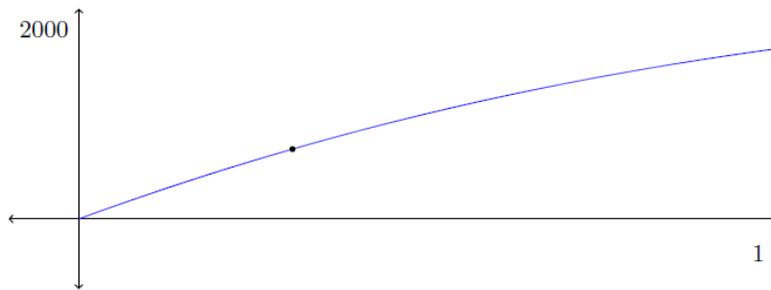
En esta primera gráfica vemos el comportamiento del valor esperado de la riqueza $E[X^\pi(10)]$ como función de π

Gráfico 1. $E[X^\pi(10)]$.



y la siguiente gráfica representa el comportamiento del capital en riesgo $Car(1000, \pi, 10)$ como función de π

Gráfico 2 $Car(1000, \pi, 10)$.



Podemos observar que el punto remarcado representa el π óptimo para la restricción de $CaR(x, \pi, 10) \leq 500$

5.2 Ejemplo comparativo con datos de Ecopetrol e Isa

Por último vamos a tomar datos reales² de un par de empresas que tienen acciones en la bolsa de valores de Colombia, estas son Ecopetrol e Isa, y simularemos por medio de los modelos de Black-Scholes y de difusión *GIG* los valores del retorno esperado, varianza y *CaR*, para ver si los resultados son coherentes con los obtenidos en el documento y haremos una proyección a futuro.

Caso 1. Acciones de Ecopetrol. Vamos a hacer un comparativo, entre los valores reales y los valores de simulación para el modelo de Black-Scholes y para

² La fuente de los datos, de Ecopetrol e Isa, es la bolsa de valores de Colombia

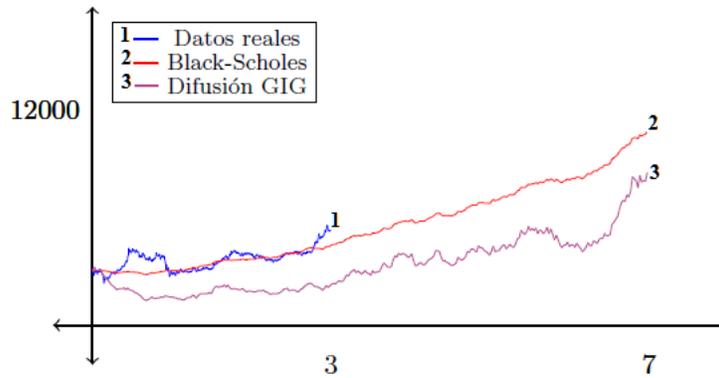
el modelo de difusión gaussiana inversa generalizada (GIG), aprovechando que tenemos el histórico de precios de las acciones de Ecopetrol.

Los datos que se poseen de las acciones de Ecopetrol inician el 26 de Septiembre de 2007 ($T = 0$) con un precio de \$2.045 cada acción y a la fecha de 24 de Septiembre de 2010 ($T = 3$) el precio de la acción se encontraba en \$3.585.

Para los datos dados de Ecopetrol se hallaron los coeficientes necesarios para hacer una simulación en los modelos de Black-Scholes y de difusión GIG, así que se calcularon los parámetros b y σ , los valores calculados son $b = 0.185$ y $\sigma = 0.057$, además tomamos los valores $\psi = 3$, $\gamma = 1$, $\lambda = 0$ y $\chi = 0$.

En la siguiente gráfica vemos un comparativo entre los datos reales y la realización de un camino para cada uno de los modelos.

Gráfico 3. Ecopetrol



Haciendo la simulación completa podemos calcular la varianza y el capital en riesgo para el modelo de Black-Scholes y de Difusión GIG, de modo que tenemos los siguientes resultados.

Modelo	$CaR(2045, 1, 3)$	Varianza($X^1(3)$)	$E [X^1(3)]$
Black-Scholes	-300.710	113599.145	3551.553
GIG	4433.122	4733942.737	3586.303

De los datos vemos que el CaR en el modelo de Black-Scholes es negativo, esto se debe a que el retorno medio de la acción es muy alto, con una volatilidad muy baja, comparado con la tasa de interés del bono (para este caso $r = 0.05$). Estos resultados nos dicen que la acción tiene un comportamiento muy bueno de tal forma que el riesgo de perder es prácticamente nulo y el retorno esperado es muy alto. Por otro lado los resultados en el caso del modelo de difusión GIG , son los esperados y para este caso quieren decir que el 95 % de las pérdidas posibles comparadas con el bono son menores a \$4433.122.

Como una proyección a futuro podemos tomar $T = 7$ (Septiembre de 2014) con lo que las mediciones están dadas por

Modelo	$CaR(2045, 1, 7)$	Varianza($X^1(7)$)	$E [X^1(7)]$
Black-Scholes	-1901.420	491720.375	7389.071
GIG	5487.571	20760644.348	7510.275

En las proyecciones se evidencia el hecho que el CaR es creciente en el modelo de difusión GIG .

El valor de la varianza significa que en el modelo de Black-Scholes la desviación estándar es 701.23 lo que es totalmente razonable y además el 93.33 por ciento de los resultados se encuentran en el intervalo [5285.39, 9492.75], lo que es muy optimista. Y en el modelo de GIG la desviación estándar es 4556.39, que aunque es un poco alta es un valor razonable y además el 93.33 por ciento de los resultados se encuentran en el intervalo [-6158.88, 21179.43], lo que significa que el problema de media-varianza en un modelo de difusión GIG es poco preciso, debido a las colas más pesadas.

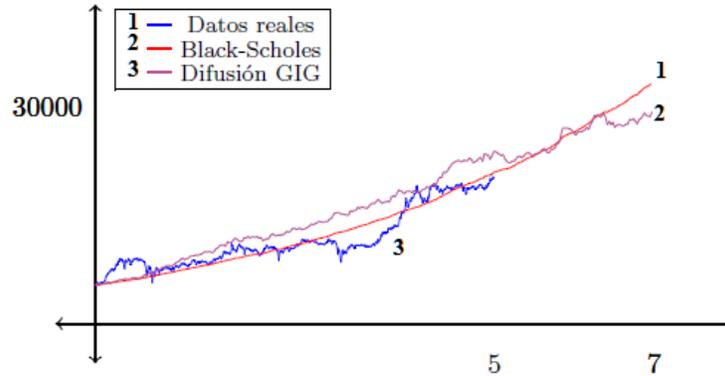
Caso 2. Acciones de Isa.

En el caso de ISA se tienen históricos más amplios (tomaremos 5 años), los datos de ISA inician el 25 de Septiembre de 2005 ($T = 0$) a un precio de \$3.600 cada acción y a la fecha de 24 de Septiembre de 2010 ($T = 5$) el precio de la acción se encontraba en \$13.700.

Los coeficientes necesarios para hacer una simulación en los modelos de Black-Scholes y de difusión GIG son b y σ , así que los coeficientes calculados son $b = 0.267$ y $\sigma = 0.020$, además tomamos los valores $\psi = 24$, $\gamma = 1$, $\lambda = 0$ y $\chi = 0$.

La siguiente gráfica muestra un comparativo entre los datos reales y la realización de un camino para cada uno de los modelos.

Gráfico 4. Isa



Haciendo la simulación completa, calculamos la varianza y el capital en riesgo para los modelos de Black-Scholes y de Difusión *GIG*, de modo tenemos los siguientes resultados.

Modelo	$CaR(3610, 1, 5)$	Varianza($X^1(5)$)	$E [X^1(5)]$
Black-Scholes	-6973.905	381349.210	13700.705
GIG	6150.337	10349833.808	13768.912

De los datos vemos que el CaR , en el modelo de Black-Scholes, es de nuevo un valor negativo, esto se debe nuevamente a que la acción tiene un comportamiento muy bueno, de tal forma que el riesgo de perder es prácticamente nulo. Por otro lado recordemos que el CaR como función del tiempo es creciente primero y luego decreciente, así que con estos coeficientes el valor de T donde es creciente, debe ser inferior a 5.

Los resultados en el caso del modelo de difusión *GIG*, son nuevamente los esperados y para este caso quieren decir que el 95 % de las pérdidas posibles comparadas con el bono son menores a \$6150.337.

Como una proyección a futuro podemos tomar $T = 7$ (Septiembre de 2012) con lo que las mediciones están dadas por

Gráfico 3. Ecopetrol

Modelo	$CaR(2045, 1, 7)$	Varianza($X^1(7)$)	$E [X^1(7)]$
Black-Scholes	-14073.344	1107470.405	23347.885
GIG	6700.925	30081817.239	23473.885

Vemos que el CaR aunque aumentó, no aumentó significativamente, lo que quiere decir que la inversión a 5 o 7 años tiene casi el mismo riesgo, pero a 7 años el valor esperado es mucho mayor, por lo cual es mejor invertir a 7 años aunque el activo sea riesgoso.

Por otro lado el aumento de la varianza es significativo lo que quiere decir que, si solo se tiene la medida de varianza para el riesgo y no se quiere incurrir en demasiado riesgo, es mejor invertir a 5 años.

El valor de la varianza significa que en el modelo de Black-Scholes la desviación estándar es 1052.36 lo que es totalmente razonable y además el 93.33 por ciento de los resultados se encuentran en el intervalo [20190.79, 26504.98]. Y en el modelo de GIG la desviación estándar es 5484.69, que aunque es un poco alta es un valor razonable y además el 93.33 por ciento de los resultados se encuentran en el intervalo [7019.82, 39927.95].

6. Conclusiones

- 1 .La investigación que se llevó a cabo en este trabajo puede ser continuada de manera natural generalizando más los procesos con los que se trabajó, es decir que se puede trabajar con mayor profundidad en semimartingalas o con procesos de Levy, además una investigación más genérica sobre las medidas de Valor en Riesgo VaR y Capital en Riesgo CaR y sus implicaciones financieras, serán un gran valor agregado a este trabajo.
- 2 . La representación de activos en la bolsa de una forma realista como un modelo matemático, es muy importante para conocer el comportamiento y propiedades que puedan establecerse en un mercado financiero, pero la predicción de datos a futuro como parte del modelo no es certera puesto que depende del valor esperado, el cual nos dice que en un portafolio óptimo se esperaría tener una cantidad X de dinero en un horizonte de tiempo T , y no nos asegura la ganancia. Por esta razón las predicciones futuras no hacen parte del modelo.
- 3 . Las simulaciones para cualquiera de estos modelos son muy importantes puesto que la componente aleatoria no nos permite ver, en realidad, el comportamiento de las soluciones del portafolio óptimo para cada uno de los modelos, así que una realización de un proceso estocástico se convierte en una herramienta crucial para ver, comparar y observar los resultados. En casos donde una solución no pueda ser hallada en forma explícita, las simulaciones toman mayor importancia pues son la única herramienta para obtener resultados.
- 4 . En el afán de entender el universo financiero se han creado muchos modelos, pero la forma realista de este modelo es de gran importancia pues muestra la existencia de un portafolio en el cual se refleja un hecho del mercado de activos que es “Si el horizonte de tiempo es grande, invertir en acciones es más rentable que invertir en bonos” como se ve en la proposición 3.4.1, que muestra el hecho que bajo la medida de CaR hay un portafolio que refleja dichos resultados empíricos y realistas. Lo que quiere decir que, desde este punto de vista, la medida CaR como medida de riesgo es más realista que la medida de varianza.
- 5 . El ejemplo de los datos comparativos de Ecopetrol e Isa con las simulaciones del modelo de Black-Scholes y modelo de difusión GIG indican

que el mercado financiero colombiano es muy estable y no presentan tantos altibajos como los modelos de difusión, por lo tanto los procesos de precios se adaptan bastante bien al Modelo de Black-Scholes.

Bibliografía

- Bachelier, L. (1900) Theorie de la Speculation. *Annalea Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 17 pp. 21-86. 1900.
- Bhattacharya, R., and E. C. Waymire (2007). A Basic Course in Probability Theory. Springer.
- Billingsley, P. (1995) *Probability and Measure*. Wiley, 3ra edition.
- Borkovec, M., and C. Klüppelberg (1998). *Extremal behaviour of Diffusion Models in Finance* 1, pp. 47-80.
- Brealy, R., S. Myers, and F. Allen (2006). *Principios de Finanzas Corporativas*. McGraw Hill, 8va Edición.
- Canavos, G. (1999). *Probabilidad y Estadística*. McGraw Hill.
- Ca Dalang, D., D. Khoshnevisan, C. Müller, D. Nualart, and Y Xiao (2009). *A Minicourse on Stochastic Partial-Differential Equations*. Springer.
- De Castro, R. (2003). El Universo LATEX. Unibiblos, Universidad Nacional de Colombia, Bogota. 2da Edición.
- Downey, A. (2008). *Think Python, How to Think like a Computer Scientist*. Green Tea Press.
- Embrechts, P. A. (1983). A property of the Generalized Inverse Gaussian Distribution with some Applications. *Journal of Applied Probability*, 20(3), pp. 537-544.
- Hui-Hsiung, K. (2006). Introduction to Stochastic Integration. Springer.
- Jian, Q. and G. C. Sun Luis (2003). Stochastic Optimal control via Bellman's Principle. NASA/CR
- Jorgenses, B. (1982). Stadiistical properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution. Springer.
- Jorgensen, B. (1987). Exponential Dispersion Models. *Journal of the Royal Statistical Society. Serie B Methodological*, 49(2), pp. 127-162.
- Jorion, P. (2001). Value at Risk. McGraw Hill. 2nd Edition.
- Karatzas, I. & S. E. Shreve (1991). Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer.
- Karatzas, I. & S. E. Shreve (1998). Methods of Mathematical Finance, Springer.
- Klüppelberg C., S. Emmer, and Korn R. (2001). Optimal Portfolios with Bounded Capital-at Risk. *Math Finance*, 11, pp. 365-384
- Korn, R., and E. Korn. (2001). *Option Pricing and Portfolio Optimization*. American Mathematical Society.
- Korn, R. (1999). Optimal Portfolios, Stochastic Models for Optimal Investmen and Risk Managment in Continuous Time. World Scientific.
- Kushner, H. (1967), Stochastic Stability and Control, 33. Academic Press.
- Krylov. N. V. (1980). Controlled Difussion Processes. Springer.
- Krylov N.V. (2009). Controlled Difussion Processes. Springer.
- Lantangen, H. P. (2009). A Primer on Scientific Programming with Python. Simulation Research Laboratory and University of Oslo.
- Mordecki, E. Modelos matemáticos en finanzas: Valuación de Opciones. Centro de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Montevideo Uruguay.
- Markowitz, H. (1959). Portfolio Selection-Efficient Diversification of Investments. Wiley, New York.
- Mikosch, T. (1998). Elementary Stochastic Calculus with Finance in View. World Scientific Publishing Co.
- Muñoz, M. y L. Blanco (2002). Introducción a la teoría avanzada de probabilidad. Universidad Nacional de Colombia.
- Muñoz, M. y L. Blanco (2003). Análisis Estocástico. Universidad Nacional de Colombia.
- Nualart, D. Models estocastics in Finance

- Nualart, D. Models probabilistes dels mercats financers
- Oksendal, B. (2007). Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Springer, 6th Edition.
- Pinsky, M. A. (2003). Introducción al análisis de Fourier y las ondas. Thompson
- Protter, P. E. (2004). Stochastic Integration and Differential Equations. Springer
- Raj S. C. and J. L. Folks (1974). Estimation of the Inverse Gaussian Distribution Function. *Journal of the American Statistical Association*, 69(345), pp. 250-254.
- Raj S. C., and J. L. Folks (1976). Optimum Test Procedures for the Mean of first Passage Time Distribution in Brownian motion with Positive Drift (Inverse Gaussian Distribution). *Technometrics* 18(2), pp. 189-193
- Rincón L. Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias, UNAM.
- S. M. Franklin Allen, and R. Brealey (2006). Principios de Finanzas Corporativas. Mc Graw Hill. 8va. edición
- Saboya, D. (2009). Optimización en portafolios con la presencia de sucesos inesperados. Tesis, Universidad Nacional de Colombia.
- Sheldon, R. (1998). A First Course in Probability. Prentice Hall, 5th Edition.
- Shiryayev, A., and J. Jacod (200). Limit Theorems for Stochastic Processes. Springer, 2nd edition.
- Sidney, I. R. (1999). A Probability Path. Birkhauser
- Sondermann, D. (2006). Introduction to Stochastic Calculus for Finance. Springer.
- Stegun I. G. and M. Abramowitz (1965). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York.
- Steven, S. (2004). Stochastic for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model. Springer.
- Steven, S. (2004). Stochastic for Finance II: Continuous-Time Models. Springer.
- Sundt, B., and J. L. Teugels (2004). Encyclopedia of Actuarial Science, 1, Wiley.
- Sulem, A., and B. Oksendal (2000). Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. Springer.
- Tweedie, M. C. K. (1975). Statistical properties of Inverse Gaussian Distribution II. *The Annals of Mathematical Statistics*, 8(3), pp. 695-705.
- Walter, R. (1987). Real and Complex Analysis. McGraw Hill.
- Waymire E. C., and R. Bhattacharya (2007), A basic Course in Probability Theory. Springer.
- Xiao-Tie, D. L. and K. W. Zhong-Fei (2007). Continuous-Time optimal Portfolio Selection using Mean-Car models. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 7(1), pp. 35-49.
- Zastawniak, T., and Z. Brzezniak (2002). *Basic Stochastic Processes. A Course Through Exercises*, Springer.