



*fundación de investigación*

ISSN: 1665-5346

---

**Volumen 7**  
**Número 2**  
**Julio-Diciembre 2012**

---

**EDITOR**

Gerardo Dubcovsky

**EDITORES ADJUNTOS**

Myron Scholes

James Heckman

John C. Hull

Tom Copeland

Edward I. Altman

Marco Avellaneda

Aloisio Araujo

Anthony Thirlwall

James R. Barth

Fausto Hernández Trillo

José C. Ramírez Sánchez

Edgar Ortiz

Francisco López-Herrera

Francisco Venegas-Martínez

Carlos Guerrero de Lizardi

**COMITÉ EJECUTIVO**

José A. Quesada Palacios

Sergio F. Ruiz Olloqui Vargas

Manuel Osuna y Fernández

Emilio Illanes Díaz Rivera

Claudia E. Castillo Ramírez

Beatriz Romero Sánchez

---

Patrocinado por:



# REVISTA MEXICANA DE ECONOMÍA Y FINANZAS

**Nueva Época**

## REMEF

**(THE MEXICAN JOURNAL OF  
ECONOMICS AND FINANCE)**

**CONTENIDO:**

Reacción del Mercado de Valores Mexicano ante los escándalos financieros: Evidencia empírica.

**MARCELA JARAMILLO JARAMILLO Y MARÍA ANTONIA GARCÍA BENU**

Sincronización de fase en los mercados internacionales de capitales, evidencia de integración.

**SALVADOR CRUZ AKÉ, FERNANDO RAMÍREZ ALATRISTE Y REYNA SUSANA GARCÍA RUIZ**

An Empirical Analysis of the Dimensions of Corporate Social Responsibility in Portugal.

**SANDRA AFONSO, PAULA ODETE FERNANDES AND ANA PAULA MONTE**

El modelo SABR y su relación con la geometría diferencial: Valuación de opciones de compra de dólares del Banco de México.

**GUILLERMO SIERRA JUÁREZ**

Optimización de portafolios con capital en riesgo acotado.

**HUGO EDUARDO RAMÍREZ J. Y LILIANA BLANCO CASTAÑEDA**

**REVISTA MEXICANA DE ECONOMÍA Y FINANZAS**  
**NUEVA ÉPOCA REMEF**  
**(THE MEXICAN JOURNAL OF ECONOMICS AND FINANCE)**

---

---

**VOLUMEN 7**                      **NÚMERO 2**                      **JULIO 2012**

---

---

**CONTENIDO**

**EDITORIAL IMEF**

C.P.C. José A. Quesada Palacios (Presidente Nacional del IMEF)

**REACCIÓN DEL MERCADO DE VALORES MEXICANO ANTE LOS ESCÁNDALOS FINANCIEROS: EVIDENCIA EMPÍRICA.**

Marcela Jaramillo Jaramillo (Universidad Autónoma del Estado de México), María Antonia García Benau (Universidad de Valencia)(Ganador del 2do Lugar, Premio de Investigación Financiera IMEF-2010) ..... 129

**SINCRONIZACIÓN DE FASE EN LOS MERCADOS INTERNACIONALES DE CAPITALES, EVIDENCIA DE INTEGRACIÓN.**

Salvador Cruz Aké (Instituto Politécnico Nacional), Reyna Susana García Ruiz (Universidad Nacional Autónoma de la Ciudad de México), Fernando Ramírez Alatríste (Universidad Nacional Autónoma de la Ciudad de México).....155

**AN EMPIRICAL ANALYSIS OF THE DIMENSIONS OF CORPORATE SOCIAL RESPONSIBILITY IN PORTUGAL**

Sandra Afonso (Instituto Politécnico de Bragança), Paula Odete Fernandes (Instituto Politécnico de Bragança), Ana Paula Monte (Instituto Politécnico de Bragança).....175

**EL MODELO SABR Y SU RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL: VALUACIÓN DE OPCIONES DE COMPRA DE DÓLARES DEL BANCO DE MÉXICO**

Guillermo Sierra Juárez (Universidad de Guadalajara).....185

**OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS CON CAPITAL EN RIESGO ACOTADO**

Hugo Eduardo Ramírez J. (Politécnico Granacolombiano Institución Universitaria), Liliana Blanco Castañeda (Universidad Nacional Autónoma de Colombia, Bogota.) ..... 211

## EDITORIAL IMEF

Dentro de todo gran proyecto, el reto siguiente a la inauguración o estreno público es continuar. La nueva época de la Revista Mexicana de Economía y Finanzas fortalece su consolidación en este segundo número, cuya difusión busca posicionar el alto nivel del contenido como una referencia, entre investigadores y profesionales, en el ámbito financiero, económico y empresarial.

La información, conforme se comparte, genera conocimiento y riqueza intelectual en diversos niveles de la sociedad. México, en vías de desarrollo e incremento de su competitividad, busca potencializar las variables cuyo impacto generen soluciones a las diversas problemáticas de índole nacional. Es por ello que La Fundación de Investigación del Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas, A.C. (IMEF), en alianza con PwC, aportan, en excelente medida, valor al país a través del impulso y conexión a los principales actores, mismos que nos encaminan hacia una sociedad del conocimiento.

Asimismo, la aportación de capital intelectual representa la continua evolución del acervo, dado que las publicaciones son artículos inéditos que buscan innovar, tanto teoría como práctica, a través del gran talento de sus editores e investigadores. Además, debido al bajo número de publicaciones mexicanas que se presentan en comparación con los países desarrollados, la Fundación de Investigación se suma a la intención de mejorar el nivel y transmitir la riqueza de la información generada hacia los mexicanos.

Por otro lado, en atención a las nuevas tendencias tecnológicas, la REMEF ahora podrá estar disponible a través de una plataforma digital, misma que nos acercará aún más al objetivo de posicionar el contenido con mejor dirección, es decir, extender la divulgación de publicaciones mexicanas hacia contextos globales al romper las barreras de libro impreso.

Progresar es posible gracias a todos aquellos que creen en el proyecto y continúan aportando elementos clave y de calidad; sin duda el talento es y seguirá siendo la fuente esencial de esta Revista Especializada.

**C.P.C. José A. Quesada Palacios**  
*Presidente Nacional del IMEF*

# EL MODELO SABR Y SU RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL: VALUACIÓN DE OPCIONES DE COMPRA DE DÓLARES DEL BANCO DE MÉXICO

Guillermo Sierra Juárez\*

Universidad de Guadalajara, CUCEA ,Departamento de Métodos Cuantitativos

(Recibido 28 de noviembre 2011, aceptado 24 de junio de 2012)

---

---

## Resumen

El objetivo del presente trabajo es revisar la relación entre el modelo de volatilidad SABR y la geometría diferencial de acuerdo a la versión propuesta por Henry-Labordere (2009), la cual es una propuesta alternativa a la teoría de perturbaciones de Hagan (2002) para estimación de volatilidades. Se realiza la calibración de la volatilidad del tipo de cambio peso/dólar utilizando el modelo SABR, además se hace la valuación de opciones para la acumulación de reservas del Banco de México. Se encuentra que el valor de la prima de la opción compuesta (OC) de Banxico obtenida con métodos tradicionales con volatilidad constante es diferente a la del modelo de volatilidad SABR.

## Abstract

The purpose of this paper is to review the relationship between the SABR volatility model and differential geometry according to Henry-Labordere's (2009) version, which is an alternative proposal of perturbation methods from Hagan (2002). It is calibrated the exchange rate dollar/peso by using the SABR model, moreover the option price for the case of reserves accumulation of the central Bank on Mexico is carried out. It is found that the traditional option price with constant volatility is different front that in the SABR volatility model.

*Clasificación JEL: C61, G10, G12.*

*Palabras clave: SABR, Volatilidad, Reservas, Geometría diferencial.*

---

\* Universidad de Guadalajara, Departamento de Métodos Cuantitativos. Av. Juárez No. 976, Col. Centro, C.P. 44100, Guadalajara, Jalisco, México. Teléfono (33) 3134-2222. Correo-electrónico: gsierraj@yahoo.com.mx

## 1. Introducción

Como es bien sabido, en el mundo Black-Scholes-Merton la volatilidad es constante para distintos precios strike, situación que no se observa en la realidad, es decir, distintos precios de ejercicio, les corresponde distintas volatilidades para poder empatar los precios observados en el mercado y para explicar esto aparecen los llamados *skew* o *smiles* de volatilidad. El primer término usualmente se utiliza para hacer referencia a la pendiente de la función de la volatilidad y el segundo principalmente para hacer énfasis en la curvatura de la función.

El estudio del problema de la volatilidad constituye un problema esencial en la actualidad para el entendimiento de los mercados globales. Por otra parte, desde el punto de vista de un problema de investigación el estudio de la volatilidad constituye un desafío interesante que demanda la utilización de herramientas y técnicas cada vez más complejas que mejoren la estimaciones del modelo.

A continuación de forma breve se menciona los temas que se trataran en las secciones siguientes: en la sección 2 el trabajo presenta una revisión de trabajos relacionados con el tema, en la sección 3 se presenta un bosquejo de la deducción del modelo SABR, especialmente para la volatilidad, esta interesante versión esta completamente basada en los trabajos de Henry-Labordere[2009]. En la sección 4, se propone una aplicación del modelo SABR de volatilidad al problema de la estrategia de acumulación de reservas del Banco de México, al final se presentan los resultados y las conclusiones del trabajo.

## 2. Revisión de trabajos previos relacionados

Existe una amplia gama de modelos de volatilidad, que van desde la aproximación por la desviación estándar de los datos históricos, pasando por los modelos econométricos y de series de tiempo, como el modelo GARCH y los modelos de volatilidad estocástica. A continuación se hace una breve presentación de trabajos previos relacionados con el desarrollo del modelo SABR.

Dentro de los primeros trabajos tenemos el de Dupire (1994) quien propuso, calibrar, a partir de los precios de mercado de opciones europeas líquidas la volatilidad local  $\sigma_{loc}(t, S_t)$ . Se propone inicialmente una función de volatilidad local dada una volatilidad inicial y se va calculando el precio teórico de la opción, posteriormente se va cambiando la función de volatilidad teórica hasta que coincida los precios teóricos locales para cada precio de ejercicio y su vencimiento. Una vez obtenida la volatilidad local el modelo puede reproducir correctamente los precios de opciones call y put europeos para distintos strikes y vencimientos. Este modelo sigue un método de valuación cobertura de opciones en presencia de *smile* y *skews* de volatilidades del mercado.

El desarrollo de la volatilidad local por Dupire (1994) y Derman and Kani (1994), ha sido el más gran avance en el entendimiento del *smile* y del *skew* de volatilidad. En una otra dirección complementaria, una importante aproximación de volatilidad estocástica fue propuesta por Hull y White (1987) y por supuesto que se debe mencionar el modelo de Heston (1993). Finalmente

se considera trascendente para este trabajo la contribución de Hagan, Kumar, Lesniewski y Woodward (2002) sobre el modelo SABR.

El modelo de volatilidad local es autoconsistente, libre de arbitraje y ayuda a explicar los *smiles* y *skews* de volatilidad, sin embargo, se ha observado recientemente en el mercado, según Hagan (2002), que la dinámica del comportamiento de los *smiles* y *skews* de volatilidad pronosticados por el modelo local son opuestos al comportamiento observado. El modelo de volatilidad local predice que el skew se mueve en dirección opuesta al nivel de mercado, pero en la realidad se mueve en la misma dirección.

La consecuencia más importante del modelo de volatilidad local, es que las coberturas son frecuentemente peores que las coberturas de Black-Scholes ya que son efectivamente inconsistentes con el movimiento del smile del mercado. Por esta razón principalmente, se considera que el modelo SABR es un mejor modelo que el de volatilidad local

El trabajo original de Hagan (2002) y De Jong Lieke (2010) utiliza teoría de perturbaciones para obtener el precio de opciones plain vanilla del modelo SABR, y sus volatilidades implícitas asociadas. La estimación de la volatilidad implícita ha recibido varias críticas, considerando por ejemplo Rebonato (2009), en donde afirma que las volatilidades implícitas son solamente números equivocados puestos en una fórmula incorrecta para obtener un precio correcto, pero por varias razones esos números incorrectos han llegado a ser una métrica común en los mercados para comunicar los precios de las opciones. Otros trabajos relacionados con el tema son los de Avramidi (2002) y (2007) que revisan problemas del Heat Kernel con geometría diferencial y desde el punto de vista técnico y de operadores desde una perspectiva más general.

El trabajo de West (2004), es uno de los pocos trabajos publicados para la calibración del modelo SABR de un mercado de tipo de cambio de un país emergente como es el sudafricano, fuera de este artículo en la academia prácticamente no existen más trabajos relacionados a la aplicación del modelo SABR y lamentablemente todavía menos para el caso latinoamericano.

Entre los trabajos principales relacionados con la acumulación de reservas para en caso del Banco Central de México, tenemos dos autores de la misma institución a Galan M. And Duclaud (1996) y a Werner A. Milo (1998) en secciones posteriores se explica en detalle su trabajo.

### 3. Modelo SABR

#### 3.1 Antecedentes

El modelo SABR (por las siglas de stochastic alpha beta, rho) propone el comportamiento de una tasa forward  $f$  ( que pueden ser un tasa swap forward, tasa forward del tipo de cambio, precio forward de acciones etc.) y de su volatilidad descrita por un parámetro  $\alpha$ , mediante dos procesos estocásticos.

Es importante considerar las siguientes observaciones acerca del modelo SABR: a) la tasa forward y su volatilidad son martingalas b) todos los parámetros del modelo  $\nu, \beta, \rho$  son constante y específicamente para una tasa forward c) Cada tasa forward vive en su propia medida y no sabe nada acerca de las

otras tasas forward. Se propone que la de la tasa forward y su volatilidad estén descritos por las siguientes ecuaciones:

$$df = \alpha f^\beta dW_1 \quad f(0) = f_0 \tag{1}$$

$$d\alpha = \nu \alpha W_2 \tag{2}$$

donde  $dW_1, dW_2$  son movimientos brownianos,  $f$  es una tasa forward de algún subyacente,  $\alpha$  es la volatilidad y  $\nu$  es la volatilidad de la volatilidad  $dW_1 dW_2 = \rho_{12} dt$ ,  $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$  recordemos que el precio de una opción europea call o put dado por la formula de Black para futuros o forwards es:

$$C = e^{-r(T)} (fN(d_1) - KN(d_2)) \tag{3}$$

$$P = C + e^{-r(T-t)} (K - f) \tag{4}$$

$$d_{1,2} = \frac{\log\left(\frac{f}{K}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma_B^2 T}{\sigma_B \sqrt{T}} \tag{5}$$

donde  $T$  es la fecha de vencimiento,  $K$  es el precio strike o precio de ejercicio,  $f$  es la tasa forward y  $C$  y  $P$  son los precios call and put y se llega a la volatilidad SABR  $\sigma_B(f, K)$  dada por

$$\begin{aligned} \sigma_B(f, K) &= \alpha (fK)^{(\beta-1)/2} \\ &\left\{ 1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \log^2\left(\frac{f}{K}\right) + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \log^4\left(\frac{f}{K}\right) + \dots \right\}^{-1} \left(\frac{z}{x(z)}\right) \\ &\left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{(fK)^{1-\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\beta\alpha\nu}{(fK)^{1-\beta/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] T + \dots \right\} \tag{6} \end{aligned}$$

donde

$$z = \frac{\nu}{\alpha} (fK)^{(1-\beta)/2} \log\left(\frac{f}{K}\right) \tag{7}$$

$yx(z)$  esta definido como:

$$x(z) = \log\left\{ \frac{\sqrt{1-2\rho z + z^2} + z - \rho}{1-\rho} \right\} \tag{8}$$

Para distintos casos, especialmente cuando las opciones están en el dinero es decir, si  $K = f$  se reduce

$$\begin{aligned} \sigma_{ATM} &= \sigma_B(f, f) \\ &= \alpha / (f)^{(1-\beta)} \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{f^{2-2\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\beta\alpha\nu}{f^{1-\beta}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] T + \dots \right\} \tag{9} \end{aligned}$$

y para el caso normal o gaussiano ( $\beta = 0$ ) con volatilidad estocástica log-normal está dada por:

$$\sigma(K) = \alpha \frac{\log(\frac{f}{K})}{f-K} \left( \frac{z}{\chi(z)} \right) \left\{ 1 + \left[ \frac{\alpha^2}{24fK} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] T \right\} \quad (10)$$

$$z = \frac{\nu}{\alpha} \sqrt{fK} \log \frac{f}{K} \quad (11)$$

$$\sigma(K) = \alpha \left( \frac{z}{\chi(z)} \right) \left\{ 1 + \left[ \frac{\rho\alpha\nu}{4} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] \right\} \{ 1 + [\rho]T \} \quad (12)$$

$$z = \frac{\nu}{\alpha} \log \frac{f}{K} \quad (13)$$

### 3.2 Ecuaciones Kolmogorov Forward and Backward

La deducción del modelo SABR de esta sección, esta completamente basada en el trabajo de Henry-Labordere [2009], en el apéndice I se revisan algunas nociones y antecedentes de herramientas cuantitativas de geometría diferencial que son de utilidad para la deducción de la ecuación de volatilidad.

Supongamos un proceso estocástico que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica (SDE) en un mundo neutral al riesgo

$$dx_t^i = b^i(t, x_t) dt + \sigma^i(t, x_t) dW_i \quad (14)$$

$$dW_i dW_j = \rho_{ij}(t) dt$$

donde  $dW_i$  es un movimiento browniano y  $\rho_{ij}$  es la correlación entre  $dW_i$  y  $dW_j$ ,  $b_i$  es la tendencia y  $\sigma^I$  la volatilidad con condiciones iniciales  $x_0 = \alpha$

El valor justo de la opción europea el pago en el tiempo  $t$  con pay-off  $f(X_T)$  al vencimiento  $T$  esta dado por el valor medio del payoff condicional sobre la filtración  $F_t$ , el valor  $C$  de la opción depende de la densidad de probabilidad condicional (sin considerar el descuento)

$$C(\alpha, t, T) = E[f(X_s)F_t] = \int \prod_{i=1}^n f(x) p(T, x|t, \alpha) \quad (15)$$

Después el valor medio condicional  $E^p[.|F_t]$

$$C(\alpha, t, T) = f(\alpha) + E^p \left[ \int_t^T Df(x_s) ds | F_t \right] \quad (16)$$

Considerando la formula de Ito

$$f(X_T) = f(\alpha) + \int_t^T Df(X_s) ds + \int_t^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial X_i} \sigma^i(t, x) dW_i \quad (17)$$

con  $D$  un operador diferencial de segundo orden <sup>1</sup>

$$D = b^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \sigma^i(t, x) \sigma^j(t, x) \rho_{ij}(t) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \quad (18)$$

diferenciando la ecuación (15) respecto a  $T$ , integrando por partes y descartando algunos términos se obtiene la ecuación Forward Kolmogorov

$$\frac{\partial p(T, x|t, \alpha)}{\partial T} = Dp(T, x|t, \alpha) \quad (19)$$

donde

$$D = -\frac{\partial}{\partial X^i} b^i(x, t) + \frac{1}{2} \rho_{ij}(t) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \sigma^i(x, t) \sigma^j(x, t) \quad (20)$$

y la condición inicial

$$p(T, x|t, \alpha) = \delta(x - \alpha) \quad (21)$$

Análogamente se puede obtener la ecuación Backward de Kolmogorov (ecuación de Fokker-Planck)

$$\frac{\partial p(\tau, x|\alpha)}{\partial \tau} = Dp(\tau, x|\alpha) \quad (22)$$

$$D = b^i(\alpha) \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \rho_{ij} \sigma^i(\alpha) \sigma^j(\alpha) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \quad (23)$$

con la condición inicial

$$p(\tau = 0, x|t, \alpha) = \delta(x - \alpha) \quad (24)$$

es importante notar que los coeficientes de las ecuaciones Kolmogorov no tienen un buen comportamiento bajo cambio de variables, si bien,  $\sigma^i(x)$  si se transforma de forma covariante, no sucede lo mismo para el caso de la tendencia debido al término adicional. Para que la ecuación Kolmogorov se transforme covariantemente se introduce una conexión Abeliiana que a su vez depende de la tendencia y volatilidad para que se realicen la transformación covariantemente bajo el cambio de variable.

$$dx^{i'} = b^{i'}(x) dt + \sigma^{i'}(x) dW^i \quad (25)$$

$$b^{i'}(x') = \frac{\partial f^i}{\partial x^i} b^i(x) + \frac{1}{2} \rho_{ij} \sigma^i(x) \sigma^j(x) \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^i \partial x^j} \quad (26a)$$

$$\sigma^i = \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i} \sigma^i(x)' \quad (26b)$$

---

<sup>1</sup> Con la convención Einstein  $b^i(t, x) \frac{\partial}{\partial X^i} = \sum_{i=1}^n b^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i}$

### 3.3 Solución del modelo SABR

#### 3.3.1 Heat Kernel en un campo $n$ dimensional Riemanniano

La ecuación de Heat Kernel en un  $n$  dimensional de un campo Riemanniano con una métrica  $g_{ij}$  y conexión Abeliana  $A$ , nuevamente la solución esta basada en Henry-Labordere (2009), considerando la inversa de la métrica  $g_{ij}$  esta dada por

$$g^{ij}(x) = \frac{1}{2} \rho_{ij} \sigma_i(x) \sigma_j(x) \tag{27}$$

A pesar que los dos índices se repite no hay sumatoria, la métrica  $\rho^{ij} \rho_{jk} = \delta_k^i$

$$g_{ij}(x) = 2 \frac{\rho_{ij}}{\sigma_i(x) \sigma_j(x)} \tag{28}$$

El operador diferencial es elíptico si y solo si  $g_{ij}$  es una métrica

$$D = b^i(x) \partial_i + g^{ij}(x) \partial_{ij} \tag{29}$$

Un operador elíptico de segundo orden  $A$  que muestra que hay una única conexión sobre un haz de línea sobre  $M$  y una única sección  $Q(x)$ :

$$D = g^{ij} \nabla_i \nabla_j + Q = g^{-\frac{1}{2}} (\partial_i + A_i) g^{\frac{1}{2}} g^{ij} (\partial_j + A_j) + Q \tag{30}$$

Entonces la ecuación backward Kolmogorov puede ser escrita en forma covariantemente con  $g = \det[g_{ij}]$  y  $A_i$  son componentes de una conexión Abeliana

$$\frac{\partial p(\tau, x|\alpha)}{\partial \tau} = Dp(\tau, x|\alpha) \tag{31}$$

Si tomamos  $A_i = 0$ ,  $Q = 0$  entonces  $D$  llega a ser el operador Laplaciano

$$\Delta = g^{(-1/2)} \partial_i g^{(1/2)} g^{ij} \partial_j \tag{32}$$

Se puede expresar la conexión  $A_i$  y  $Q$  como función de la tendencia  $b_i$  y la métrica  $g_{ij}$  identificando con la ecuación(30)  $\partial_i$  y  $\partial_{ij}$  con las ecuaciones(22)

$$A^i = \frac{1}{2} \left( b^i - g^{-\frac{1}{2}} \partial_j (g^{\frac{1}{2}} g^{ij}) \right) \tag{33}$$

$$Q = g^{ij} (A_i A_j - b_j A_i - \partial_j A_i) \tag{34}$$

las ecuación (33) pueden ser reescritas en términos de los símbolos de Christoffel (ver apéndice I)

$$A^i = \frac{1}{2} (b^i - g^{pq} \Gamma_{pq}^i) \tag{35}$$

Resumiendo, la ecuación Heat Kernel sobre un campo Riemanniano  $M$  es construido sobre las siguientes piezas geométricas: i) Una métrica  $g$  sobre  $M$

(pieza de Segundo orden) ii) Una conexión  $A$  (pieza de primer orden) iii) Una sección  $Q$  (pieza de orden cero)<sup>2</sup>

La resolución del Heat Kernel en el corto tiempo es un importante problema en la física teórica y en las matemáticas. A continuación se muestra brevemente la solución asintótica para un Heat Kernel en un campo Riemanniano para mayor información también se recomienda DeWitt (1975).

### 3.3.2 Expansión Heat Kernel

A continuación se sigue la deducción a partir de Henry-Labordere (2009). Sea  $M$  un campo  $n$  dimensional Riemanniano y  $p(\tau, x | y)$  es el Heat Kernel de la ecuación Heat Kernel. Entonces hay secciones suaves y  $a_n(x, y)$  de tal forma que para cada  $N > n/2$ ,  $p^N(\tau, x | y)$  se define la formula

$$p^N(\tau, x|y) = \phi \left( d(x, y)^2 \right) \frac{\sqrt{g(y)}}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\Delta(x, y)} P(y, x) e^{-\frac{\sigma(x, y)}{2\tau}} \sum_{n=0}^N a_n(x, y) \tau^n \tag{36}$$

esto es asintóticamente a  $p(\tau, x | y)$  donde

i)  $\phi$  es una función cut-off<sup>3</sup>

ii)  $\sigma(x, y)$  es una función mundo Synge igual a un medio del cuadrado de la distancia geodésica  $d(x, y)$  entre  $x$  y  $y$  para una determinada métrica

iii)  $\Delta(x, y)$  determinante Van Vleck-Morette  $\Delta(x, y) = g(x)^{-\frac{1}{2}} \det \left( -\frac{\partial^2 \sigma(x, y)}{\partial x \partial y} \right) \cdot g(y)^{-\frac{1}{2}}$  con  $g(x) = \det [g_{ij}(x, x)]$

iv)  $P(x, y)$  es el transporte paralelo de la conexión Abeliiana a lo largo de la curva geodésica  $C$  del punto  $y$  a  $x$   $P(x, y) = e^{\int_{c(y,x)} A_i dx^i}$

Los primeros coeficientes diagonales del Heat Kernel  $a_i(x, y)$  son

$$a_0(x, y) = 1 \tag{37a}$$

$$a_1(x, x) = P(x) = 1/6R + Q(x) \tag{37b}$$

$$a_2(x, x) = \frac{1}{180} (R_{ijkl}R^{ijkl} - R_{ij}R^{ij}) + \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{12}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2}\Delta Q + \frac{1}{30}\Delta R \tag{37c}$$

los coeficientes llegan a ser exponencialmente más complicados conforme se incrementa con  $R_{ijkl}$  el tensor de Riemann  $R_{ij}$  el tensor de Ricci, el escalar de curvatura  $R$  y la conexión Abeliiana asociada a la curvatura  $F_{ij}$ .

<sup>2</sup> Un Heat Kernel para una ecuación Heat Kernel es una sección continua  $p(\tau, x | y)$  que satisfice las siguientes propiedades:

i)  $\partial_\tau p(\tau, x, y)$  es continua en  $(\tau, x, y)$

ii)  $\frac{\partial^2 p(\tau, x|y)}{\partial x_i \partial y_j}$  es continua en  $(\tau, x, y)$  para cualquier sistema de coordenadas  $x$

iii)  $p(\tau, x | y)$  satisfice las condiciones de frontera  $(\tau = 0)^2$  y en el límite  $\lim_{\tau \rightarrow 0} p(\tau, x|y) = \delta(x - y)$

<sup>3</sup> Antes llamamos la función cut-off  $\phi$ . Si  $\phi : R+ \rightarrow [0, 1]$  es una función suave tal que  $\phi(s) = 1$  si  $s < \epsilon^2/4$  y  $\phi(s) = 0$  si  $s > \epsilon^2/4$ .

**3.3.3 Modelos con volatilidad estocástica y geometría de curvas complejas**

El modelo de la volatilidad local (LVM) puede ser calibrado con la volatilidad inicial vía la formula de Dupire (1994), sin embargo, no es muy realista porque el proceso no es homogéneo en el tiempo y por lo tanto la dinámica no es invariante ante las traslaciones. El modelo de volatilidad estocástica (SVM) esta definido por un conjunto de dos ecuaciones diferenciales estocásticas (SDE): una para la tasa forward  $f_t$  y otro para la volatilidad instantánea estocástica  $a_t$  esto no es directamente observable en el mercado (es decir, el modelo de mercado es incompleto)

Se define el modelo de volatilidad estocástica en una medida forward  $P_t$  por el proceso

$$df_t = a_t C(f_t) dW_t \tag{38}$$

$$da = b(a_t)dt + \sigma(a_t)dZ_t \tag{39a}$$

$$dW_t dZ_t = \rho dt \tag{39b}$$

Con  $Z_t$  y  $W_t$  son dos movimientos brownianos correlacionados con valores iniciales  $f_{t=0} = f_0$  y  $a_{t=0} = \alpha$ , donde  $\sigma$  es conocida como la volatilidad de la volatilidad.  $W_t$  puede ser descompuesto sobre la base del movimiento browniano no correlacionado

$$W_t = \rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t^\perp \tag{39c}$$

$a_t$  no es martingale y tenemos un término de tendencia  $b(a)$ , asumimos que  $b(\cdot)$  and  $\sigma(\cdot)$  son solo funciones de la volatilidad  $a_t$ . se asume  $b(\cdot)$  y  $\sigma(\cdot)$  dependiente de la tasa forward  $f_t$ , de acuerdo con el resultado que afirma que  $f_t$  es una martingale si y solo si el proceso de volatilidad instantánea (log-normal)  $\xi_t = \frac{C(f_t)}{f_t} a_t$  no explota bajo la medida  $P^f$  asociada a la tasa forward como numeraria, bajo  $P^f$  (numeraria asociada a la forward) tenemos

$$\begin{aligned} d\xi &= aC(F) \partial_f \frac{C(f)}{f} dW^f + \frac{C(f)}{f} \sigma(a) dZ^f \\ &+ \left( \frac{C(f)}{f} b(a) + \partial_f \left( \frac{C(f)}{f} \right) C(f) a \rho \sigma(a) + \frac{a^3}{2} C(f)^2 \partial_f^2 \left( \frac{C(f)}{f} \right) \right) dt \\ &+ \xi \left( aC(f) \partial_f \left( \frac{C(f)}{f} \right) \sigma(a) \right) \end{aligned} \tag{40}$$

En particular para el caso SABR, se tiene

$$\xi_t = f_t^{\beta-1} a_t, C(f) = f_t^\beta, b(a_t) = 0, \sigma(a_t) = \nu a_t$$

Entonces:

$$\begin{aligned} d\xi &= a(\beta - 1) f_t^{2\beta-2} dW^f + a \nu f^{b-1} dZ^f \\ &+ \left( a_t^2 \rho \nu (\beta-1) f^{2\beta-2} + \frac{a^3}{2} (\beta-1)(\beta-2) f^{3\beta-3} + a_t^2 \rho \nu (\beta-1) f^{3\beta-3} + \rho \nu a_t^2 f^{2\beta-2} \right) dt \end{aligned} \tag{41}$$

para el caso SABR log-normal el proceso esta definido por:

$$df_t = a_t f_t dW_t \quad (42)$$

$$da = \nu \sigma(a_t) dZ_t \quad (42a)$$

$$dW_t dZ_t = \rho dt \quad (42b)$$

de la ecaución 42a)

$$da_t = \rho \nu a_t^2 dt + \nu a_t dZ_t^f \quad (43)$$

Usando  $\xi_t = a_t$  se sigue  $P^f$ , por lo tanto tenemos

$$l_{PT}(a) = -\frac{1}{\nu^2} \left( \ln \frac{a}{c} - \frac{a}{c} + 1 \right) \quad (44a)$$

$$l_{PT}(a) = \frac{1}{\nu^2} \frac{\bar{\rho} a}{\rho C} e^{-\nu} d\nu \int \frac{\nu}{\rho C} u^{-2} e^u du \quad (44b)$$

El modelo lognormal define una martingala si y solo si  $\bar{\rho} < 0$  y es satisfecha cuando la volatilidad implícita del mercado ( $\rho < 0$  and  $\rho > 0$ ) (*skew* negativo). La métrica asociada a SVM con las definiciones de las ecuaciones 38 and 39(a,b)

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij} dx^i dx^j = \frac{2}{a^2(1-\rho^2)} \left( \frac{df^2}{C(f)^2} - 2\rho \frac{adfda}{C(f)\sigma(a)} + \frac{a^2 da^2}{\sigma(a)^2} \right) \\ &= \frac{2}{a^2(1-\rho^2)} (dq^2 - 2\rho dqd\xi + \xi^2) \end{aligned} \quad (45)$$

cambiando de variables, en las nuevas coordenadas se tiene

$$q(f) = \int_{f_0}^f \frac{df}{C(f')} \quad (46a)$$

$$\xi(a) = \int \frac{u}{\sigma(u)} du \quad (46b)$$

la métrica en coordenadas isotérmicas  $(x, y)$

$$ds^2 = e^{\phi(y)} (dx^2 + dy^2) \quad (47)$$

con variables

$$x = q(f) - \rho \xi(a) \quad (48a)$$

$$y = (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \xi(a) \quad (48b)$$

con el factor conformal  $F(y) \equiv e^{\phi(y)} \frac{2}{a(y)^2(1-\rho^2)}$  La distancia geodésica  $d$  entre dos puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$

$$d = \int_{y_1}^{y_2} \frac{F(y') dy}{\sqrt{F(y') - C^2}} \tag{49}$$

con la constante determinada por la ecuación  $C = C(x_1, y_1, x_2, y_2)$

$$x_1 - x_2 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{C dy}{\sqrt{F(y') - C^2}} \tag{50}$$

Con el tensor de Ricci y el escalar de curvatura(ver apéndice I)

$$R_{ij} = \frac{\sigma(a)}{(1-\rho^2)a^3} \left( \frac{\sigma'(a)}{\sigma(a)} - \frac{2}{a} \right) \delta_{ij} \tag{51}$$

$$R = \frac{\sigma(a)^2}{a^2} \left( \frac{\sigma(a)'}{\sigma(a)} - \frac{2}{a} \right) \tag{52}$$

En particular para la volatilidad de la volatilidad

$$R_{ij} = \frac{1}{(1-\rho^2)} a^{2p-4} (p-2) \delta_{ij} \tag{53}$$

$$R = a^{2p-2} (p-2) \tag{54}$$

Y otro factor conformal

$$F(y) = \frac{2(1-\rho^2)^{\frac{p-1}{2-p}} y^{\frac{2}{p-2}}}{(2-p)^{\frac{2}{2-p}}}, \text{ para todo } p \neq 2 \tag{55a}$$

$$F(y) = \frac{2}{(1-\rho^2)} e^{\frac{-2y}{\sqrt{1-\rho^2}}}, \text{ cuando } p = 2 \tag{55b}$$

Para el factor conformal SABR y usando la ecuación 55(a,b)

$$dS^2 = \frac{2}{a^2(1-\rho^2)} \left( \frac{df^2}{f_t^{2\beta}} - 2\rho \frac{adfda}{f_t^\beta \nu a_t} + \frac{a^2 da^2}{\nu^2 a_t^2} \right) \tag{56}$$

con un cambio de variable a las nuevas coordenadas

$$q(f) = \int_{f_0}^f \frac{df'}{f_t^\beta} \tag{57a}$$

$$\xi(a) = \int \frac{u}{\nu u} du \quad (57b)$$

La métrica llega a ser en coordenadas  $(x, y)$  (coordenadas isotérmicas)

$$ds^2 = e^{\phi(y)}(dx^2 + dy^2) \quad (58)$$

con variables

$$x = q(f) - \rho\xi(a) \quad (59)$$

$$y = (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}\xi(a) \quad (60)$$

La distancia geodésica  $d$  entre dos puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$

$$d = \int_{y_1}^{y_2} \frac{y'^{-2} dy}{\sqrt{y'^{-2} - C^2}} \quad (61)$$

con la constante  $C$  determinada por la ecuación

$$x_1 - x_2 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{C dy}{\sqrt{y'^{-2} - C^2}} \quad (62)$$

Calculando el Tensor de Ricci y el escalar de Curvatura (apéndice I)

$$R_{ij} = -y^2 \delta_{ij} = -\frac{\nu^2}{a^2(1 - \rho^2)} \delta_{ij} \quad (63a)$$

$$R = -2y^{-2} = -\nu^2 \quad (63b)$$

En particular para la volatilidad de la volatilidad

$$R_{ij} = \frac{1}{(1 - \rho^2)} a^{2p-4} (p - 2) \delta_{ij} \quad (64)$$

$$R = a^{2p-2} (p - 2) \quad (65)$$

Recuérdese que la tasa forward sigue un proceso libre de tendencia (con la medida forward  $P^T$ )

$$df_t = f_t \sigma_t dW_t \quad (66)$$

Y el modelo puede ser visto como un SVM, y asumimos  $\sigma_t = a_t \frac{C(f_t)}{f_t}$ , aplicando la fórmula Itô-Tanaka sobre el payoff  $\max(f_t - K, 0)$ , se obtiene

$$d \max(f_t - K, 0) = 1 (f_t - K) f_t \sigma_t dW_t + \frac{1}{2} f_t^2 \sigma_t^2 \delta(f_t - K) dt \quad (67)$$

Tomando el operador de valor medio  $\mathbb{E}^{PT}[\cdot|\mathcal{F}_0]$  y considerando la volatilidad local de Dupire se tiene

$$\sigma_{loc}^2 = \frac{\mathbb{E}^{PT}[\sigma_t^2 \delta(f_t - K) | \mathcal{F}_0]}{\mathbb{E}^{PT}[\delta(f_t - K) | \mathcal{F}_0]} = \mathbb{E}^{PT}[\sigma_t^2 | \delta = K | \mathcal{F}_0] \tag{68}$$

Considerando la función de Dirac significa que con  $1(\cdot)$  se tiene la función Heaviside

$$\mathbb{E}^P[\sigma_t^2 | f_t = K] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{E}^{PT}[\sigma_t^2 1(f_t - K) \in (-,)]}{\mathbb{E}^{PT}[1(f_t - K) \in (-,)]} = \mathbb{E}^{PT}[\sigma_t^2 | \delta = K | \mathcal{F}_0] \tag{69}$$

Por definición de valor medio y asumiendo un proceso de Ito

$$\sigma(t, K)_{loc}^2 = \frac{\int_0^\infty \sigma(t, K, a)^2 p(t, K, a | f_0, \alpha) da}{\int_0^\infty p(t, K, a | f_0, \alpha) da} \tag{70}$$

donde  $p(t, K, a | f_0, \alpha)$  si se asume que  $\sigma_t = a_t \frac{C(t, f_t)}{f_t}$  con  $a_t$  un Proceso de Ito y  $C(t, f_t)$  una función dependiendo de la tasa forward y del tiempo, se puede calibrar

$$C(t, K)^2 = \frac{K^2 \sigma_{loc}^2(t, K)}{\mathbb{E}^{PT}[a_t^2 | f_t = K]} \tag{71}$$

Utilizando la relación entre LVM y SVM se obtiene una volatilidad implícita asintótica para un SVM general.

La función asintótica de la volatilidad implícita a primer orden para cualquier instante de tiempo homogéneo SVM, dependiendo implícitamente de la métrica y la conexión sobre la superficie de Riemann esta dada por<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \sigma_{BS}(K, T) = & \frac{\ln \frac{K}{f_0}}{\int_{f_0}^K \frac{df}{\sqrt{2g^{ff}(a_{min})}}} \\ & \left( 1 + \frac{g^{ff}(a_{min})^T}{12} \left( -\frac{3}{4} \left( \frac{\partial_f g^{ff}(a_{min})}{g^{ff}(a_{min})} \right)^2 + \frac{\partial_f^2 g^{ff}(a_{min})}{g^{ff}(a_{min})} + \frac{1}{f_{av}^2} \right) \right) \\ & + g^{ff}(a_{min}) T 2g^{ff}(a_{min}) \phi''(a_{min}) \ln(\Delta gp2)(a_{min} - \phi'' a_{min} \phi' a_{min}) \end{aligned} \tag{72}$$

donde

i)  $f_{av} = \frac{f_0 + K}{2}$  ii)  $a_{min}$  es la volatilidad a que minimiza la distancia geodésica a la superficie de Riemann, iii)  $g$  determinante de la métrica, iv)  $P$  es el transporte paralelo de norma, v) derivada de acuerdo a, vi)  $\Delta(x, y)$  determinate Van Vleck-Moret , vii)  $g$  es el determinante de la métrica, viii)  $P$  es el transporte de norma paralelo

---

<sup>4</sup> En el apéndice II se revisa con más detalle  $\sigma_{BS}$

### 3.3.4 Modelo $\lambda$ -SABR y geometría hiperbólica

El modelo  $\lambda$ -SABR es definido por un proceso de reversión a la media, recordemos que la volatilidad  $a_t$  no es un active comerciable, nuevamente se sigue el desarrollo Henry-Labordere (2009)

$$df_t = a_t C(f_t) dW \tag{73}$$

$$da_t = \lambda(a_t - \bar{\lambda})dt + \nu a_t dZ_t \tag{74}$$

$$C(f) = f^\beta, a_0 = \alpha, f_{t=0} = f_0 \tag{75}$$

donde  $W_t$  y  $Z_t$  son dos procesos brownianos que depende de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $\nu$  and  $\rho$ . Para  $\lambda = 0$  el modelo  $\lambda$ -SABR degenera en el modelo SABR, el más interesante para nosotros. La volatilidad implícita asintótica con precio strike  $f$ , vencimiento en  $T$  y tasa forward  $f_0$  el modelo estocástico  $\lambda$ -SABR

$$\sigma_{BS}(f, T) = \frac{\ln \frac{f}{f_0}}{\text{vol}(f)} \left( 1 + \sigma_1 \left( \frac{f + f_0}{2} \right) T \right) \tag{76}$$

con

$$\begin{aligned} \sigma_1(f) &= \frac{(C(f) a_{\min}(f))^2}{24} \\ &\left( \frac{1}{f^2} + \frac{2\partial_{ff}(C(f) a_{\min}(f))}{C(f) a_{\min}(f)} - \left( \frac{\partial_f(C(f) a_{\min}(f))}{C(f) a_{\min}(f)} \right)^2 \right) \\ &+ \frac{\alpha \nu^2 \ln(\rho)(f)(1 - \rho^2) \sinh(d(f))}{2d(f)} \end{aligned} \tag{77a}$$

con

$$\text{vol}(f) = \frac{1}{\nu} \log \left( \frac{q\nu + \alpha\rho + \sqrt{\alpha^2 + q^2\nu^2 + 2q\alpha\nu\rho}}{\alpha(1 + \rho)} \right) \tag{77b}$$

$$a_{\min}(f) = \sqrt{\alpha^2 + q\nu^2 + 2q\alpha\nu\rho} \tag{77c}$$

$$d(f) = \cosh^{-1} \left( \frac{-q\nu\rho - \alpha\rho^2 + a_{\min}(f)}{\alpha(1 + \rho^2)} \right) \tag{77d}$$

$$q = \frac{f^{(1-\beta)} - f_0^{(1-\beta)}}{(1 - \beta)} \quad (\beta \neq 1); \quad q = \log \frac{f}{f_0} \quad (\beta = 1) \tag{77e}$$

Además se tiene,

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{P}{PSABR} \right)' &= \frac{\lambda}{\lambda\nu^2} \\ &\left( \frac{(\alpha - a_{\min})}{a_{\min}\alpha} + \ln \frac{a_{\min}}{\alpha} - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} (G_0(\theta_2, A_0)\theta_2' - G_0(\theta_1, A_0')\theta_1 + A_0(G_1(\theta_2') - G_1(\theta_1))) \right) \end{aligned} \tag{77f}$$

con

$$\ln(P^{SABR})'(f) = -\frac{\beta\rho}{2\sqrt{1-\rho^2}(1-\beta)} \tag{77g}$$

$$(F_0(\theta_2, A, B)\theta_2' - F_0(\theta_1, A, B)\theta_1' - A'(F_1(\theta_2, A, B) - F_1(\theta_1, A, B)))$$

y con las funciones siguientes

$$G_1(x) = \left(\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right) \quad G_0(x, a) = 1 + \frac{a}{\sin x}$$

$$A_0 = -\frac{\lambda\sqrt{1-\rho^2}}{a_{min}} \quad A_0' = \frac{\lambda\sqrt{1-\rho^2}(\alpha\rho + \nu\rho)}{a_{min}2(\nu q + \rho(\alpha - a_{min}))}$$

$$F_0(x, a, b) = \frac{\cos(x)}{a + \cos(x) + b\sin(x)} \quad F_1(x, a, b) = \int^x \frac{\cos\theta}{(a + \cos(\theta) + b\sin(\theta))^2} d\theta$$

$$\tan\theta_2 = -\frac{\alpha\sqrt{1-\rho^2}}{\alpha\rho + \nu q}\theta_2' = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\nu q + \rho(\alpha - a_{min})}\tan\theta_1 = -\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}, \theta_2' = \theta_1'$$

$$A = \frac{f^{1-\beta}\nu}{(1-\beta)a_{min}} \quad A' = \frac{f\nu(\alpha\rho + \nu q) + f^\beta(\beta - 1)}{(\beta - 1)f^\beta a_{min}2(\nu q + \rho(\alpha - a_{min}))}$$

$$B = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

Para el *smile* asintótico de Hagan-al se puede aproximar  $a_{min}$  por la siguiente expresión  $a_{min} \cong \alpha + q\rho\nu$  y  $\frac{\sin(d(a_{min}))}{d(a_{min})} \cong 1$  La conexión para el modelo  $\lambda$ -SABR es

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{2\lambda\bar{\lambda}\rho - 2\lambda\rho a - \nu a^2 C'(f)}{\nu C(f)a^2} df + \frac{-2\lambda\bar{\lambda} + 2\lambda a + \nu a^2 C'(f)}{\nu^2 a^2} da \right)$$

y la conexión y el transporte de norma paralelo es obtenido (con  $\lambda = 0$ )

$$\mathcal{A}^{SABR} = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( -d\log(C(f)) + \frac{\rho}{\nu} \partial_f C da \right)$$

$$\mathcal{P}^{SABR} = e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( -\log\frac{C(f)}{C(f_0)} + \int^f \frac{\rho}{\nu} \partial_f C da \right)}$$

en el caso de  $A_f$  el resultado no depende de la curva de la geodésica sino de los puntos finales, finalmente es posible reproducir la formula original de Hagan

$$\sigma_{BS}(K, T) = \frac{\ln\frac{K}{f_0}}{\text{Vol}(K)} \left( 1 + \sigma_1 \left( \frac{K + f_0}{2} \right) T \right) \tag{78}$$

$$\sigma_1(f) = \frac{(\alpha C(f))^2}{24} \left( \frac{1}{f^2} + \frac{2\partial_{ff}C(f)}{C(f)} - \left( \frac{\partial_f C(f)}{C(f)} \right)^2 \right) + \frac{\alpha\nu\partial_f C(f)\rho}{4} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2 \quad (78a)$$

La formula de Hagan corresponde a la conexión Abeliana de forma exacta

#### 4. Aplicación del modelo SABR a la valuación de opciones en la estrategia de acumulación de reservas del Banco de México

El modelo de volatilidad SABR puede aplicarse a la estrategia de opciones put del Banco de México para la acumulación de reservas que tiene como propósito la compra de la divisa dólar disminuyendo en lo posible su impacto en el mercado. El trabajo original sobre este tema fue desarrollado por Galan and Duclaud (1996) y en este trabajo considera en su valuación de la prima de volatilidad constante.

El Banco de México propuso en 1996 la posibilidad de comprar dólares en el mercado teniendo el cuidado de no enviar señales equivocadas al mercado. A pesar que se considera recomendable tener una cantidad suficiente de reservas, se busca un esquema que favorezca la compra de dólares cuando el mercado este ofrecido y las inhiba en el caso contrario para afectar lo menos posible el régimen de libre flotación. En agosto de ese mismo año, el Banco de México emitió un comunicado a las instituciones financieras y de crédito de México en el que invita a mediante el pago de un prima a vender dólares al instituto central, se debe mencionar que estas opciones poseen características un tanto distintas de las opciones put plain vanilla y que se detallaran más adelante.

La opción propuesta por el Banco puede considerarse como un portafolio de opciones con un día de vencimiento y que pueden ejercerse una sola vez. Sin embargo, hay un riesgo en acumular reservas de esta forma y es cuando el tipo de cambio muestra una tendencia de depreciación si de un día para otro ocurre una apreciación, resultaría optimo para los tendedores de las opciones put ejercerlas en ese momento entonces el Banco acumularía reservas a través de la compra de divisas en el mercado y al final tendría un efecto de presiones devaluatorias. Para evitar este comportamiento se ha condicionado el ejercicio de la opción a que el tipo de cambio este por abajo de un cierto nivel, de tal forma, que la opción put solo puede ejercerse si el strike del tipo de cambio no se superior al promedio aritmético de los tipos de cambio fix de los 20 días hábiles previos.

Galán y Duclaud (1996) proponen una aproximación al valor de la opción Put para la venta de dólares por parte del Banco de México pero considerando la volatilidad histórica. La opción de neta de dólares puede ser vista como un portafolio de opciones put europeas "at the money", con vencimiento a un día con el precio de ejercicio determinado por la encuesta de Banco de México del día previo, una vez que opción es ejercida las opciones restantes se pierden. Además se debe recordar que la opción del tipo de cambio solo puede ser ejercida cuando el strike es igual o menor que el promedio aritmético de la encuesta del

promedio de los n días previos a la fecha de ejercicio. Para determinar el valor del portafolio de opciones put se deberá considerar los siguientes factores:<sup>5</sup>

- a) Valor del Put “at the money”
- a) probabilidad de cumplir la restricción del promedio de los “n” días;
- b) probabilidad de ejercer la opción en un día particular .

El valor de la opción de Banco de México “OC” que cumple los factores anteriores puede aproximarse por

$$O_C = \sum_{t=1}^n \text{desc} * \text{Put}(\text{At money})^{BS} * \text{Prob}(\text{No Restriccin}) * W(\text{Ejercicio en } t)$$

$$O_C = \sum_{t=1}^n e^{-r(T-1)} * \text{Put}(\text{At money})^{BS} * N(d_1) * N(C)(1 - N(C))^{t-1}$$

donde se suman cada una de las opciones en el portafolio y  $O_C$  es producto de 1) un factor de descuento, 2) el valor de la opción put “at the money” con la formula de Black-Scholes modificada por Garman M. and Kohlhagen S. para divisas, 3) el termino de la probabilidad de ejercer en un día determinado y por ultimo 4) la probabilidad de cumplir la restricción de la opción.

Utilizando la formula deducida por Galán and Duclaud (1996) para la condición sobre el tipo de cambio

$$\text{Prob}(S_t \leq Y_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = N(d_1) \tag{81}$$

$$d_1 = \frac{Y_1^* + \left(\frac{t-1}{n} - 1\right) S_0^* - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{t-1} S_{-n+i}^* + \mu t \left(\frac{t-1}{2n} - 1\right)}{\sigma_{z(t)}} \tag{82}$$

Por otro lado  $W(t)$  es la probabilidad de ejercer en un día  $t$ , una vez que se ha ejercido la opción se elimina las posibilidad de ejercer opciones subsecuentes. Se hace notar que existe incentivos de ejercer la opciones lo mas rápido posible, es decir, una vez satisfecha la restricción mencionada y que utilidad rebase el valor de la prima de la opción, esta se ejercería. Nuevamente de los resultados de Galán and Duclaud(1996)tenemos

$$W(t) = (\text{ejercicio} = t) = N(C)(1 - N(c))^{t-1} \tag{83}$$

$$N(C) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^C e^{-\frac{z^2}{2}} dz = N(d_1) \tag{84}$$

$$C = -\frac{(\mu + O_c)}{\sigma_\varepsilon} \tag{85}$$

De las ecuaciones (81 y 82) se supone que todas las opciones son de tipo put “at the money”, con vencimiento de un día con los mismos parámetros sobre el

---

<sup>5</sup> Existe una estimación más reciente de un working paper utilizando una metodología distinta se puede revisar Werner and Milo (1998).

tipo de cambio. Estimamos la prima OC para el portafolio de la ecuación (85) utilizando la volatilidad de SABR de Agosto de 2011 (tabla 1) y el apéndice III y de la información para el tipo de cambio (peso/US dólar) y las siguientes figuras que compare con la volatilidad de SABR y OC histórica

Tabla 1. Estimación de la prima OC para el portafolio de la ecuación 85

Precio Spot del T. Cambio	$(S_t)$	12.48
Precio Strike	$(K)$	13.5
Tasa de interés	$(r)$	0.0478
Tasa de interés ex tranjera	$(r^f)$	0.00038
Vencimiento	$(T)$	0.825
Tiempo Inicial	$(t)$	0
Tasa de descuento		0.96133
Volatilidad (sigma)		0.165

Figura 3.A

Figura 3.B

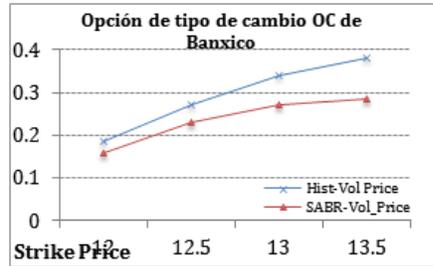
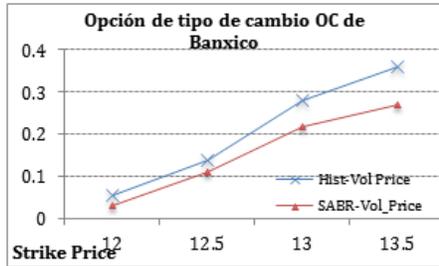


Figura 3.C

Figura 3.D

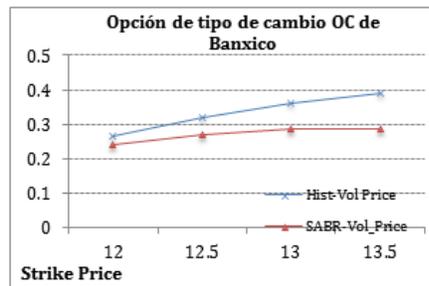
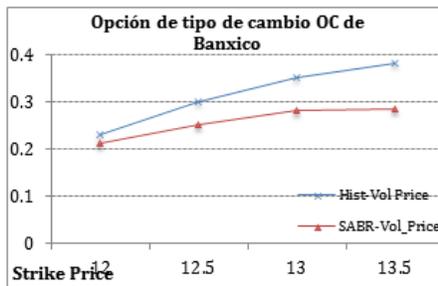


Figura 4.A

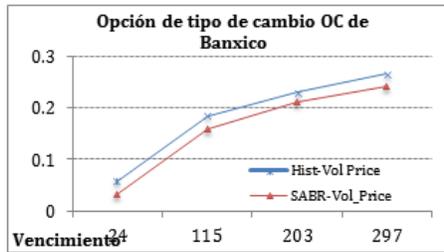


Figura 4.B

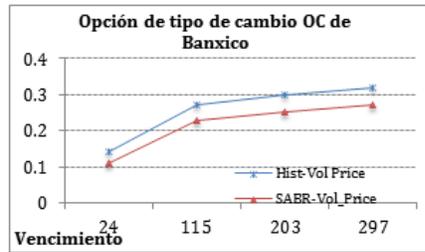


Figura 4.C

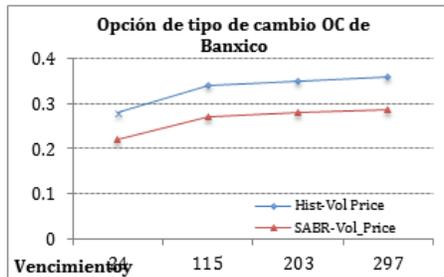
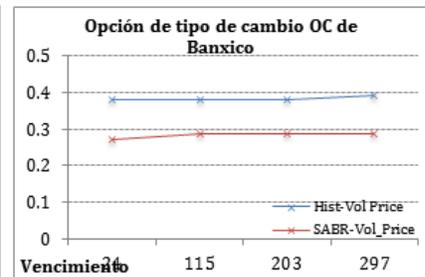


Figura 4.D



Las figuras 3 (A,B,C,D)<sup>6</sup> de la parte superior muestran la valuación de las opciones del banco de México OC (92 and 93) cuya estimación se realiza por métodos numéricos y los resultados se muestran comparando la prima obtenida para la opción OC utilizando volatilidad constante (histórica) y la obtenida a partir de la volatilidad del modelo SABR. En todos los casos, se observa que el valor de la prima de la opción OC es menor con la volatilidad SABR que el valor de la misma opción con la volatilidad histórica y esta diferencia se incrementa conforme se incrementa el precio de ejercicio. En otras palabras, con la volatilidad histórica se sobrevalúa el valor de las primas OC y el efecto es más importante conforme aumenta el precio strike.

### 5. Conclusión

En el presente trabajo se presenta un bosquejo de la deducción del modelo SABR propuesto originalmente por Henry-Labordere en el contexto de la geometría diferencial y la solución del Heat Kernel . Se verifica que se llega a los mismos resultados que los Hagan y la teoría de perturbaciones. Tanto para la deducción del valor de la opción como de la volatilidad. Este resultado, que retomamos es de importancia fundamental porque se utilizan dos técnicas completamente distintas y se llega al mismo resultado.

<sup>6</sup> Vencimiento a) 19 septiembre 2011 b) 19 diciembre 2011 c) 16 marzo 2012 d) 18 junio 2012

Es posible escribir la ecuación covariante y resolver las ecuaciones Kolmogorov forward y backward y cada modelo tiene asociada un factor conformal que esta relacionado con el escalar de curvatura. Hay que resltar la importancia de tener ecuaciones que sean iguales en cualquier sistema de referencia.

Estimando el valor de la opción Put del Banco de México, pero ahora introduciendo el ajuste en la volatilidad proveniente del modelo SABR, prácticamente el comportamiento para distintas fechas de vencimiento es el mismo, conforme crece el precio de ejercicio también aumenta el valor de la prima de la opción.

Para cada precio strike del valor de la prima, el valor de la volatilidad histórica siempre esta por debajo del correspondiente obtenido con volatilidad histórica. Es decir, si se utiliza la volatilidad histórica se esta sobreestimando el valor de la opción  $O_c$ . Este resultado es importante porque lo que nos dice es que si se estima el valor de la volatilidad a un valor más preciso, entonces el valor recibido d elas primas por Banxico debería ser menor que el recibido utilizando la volatilidad traidicional. Por otra parte, conforme aumenta el número de días al vencimiento para un determinado precio strike, también crece el valor de la opción del Banco Central  $O_c$ .

De forma similar, para un precio strike fijo y al ir variando la fecha de vencimiento el valor de la opción  $O_c$  con volatilidad histórica siempre es mayor que el correspondiente con volatilidad SABR. Nuevamente hay que mencionar que entonces el valor de recibe por la venta de opciones  $O_c$  debería ser un poco menor que con la estimación tradicional.

La utilización de reservas mediante de opciones “Put” por el Banco central reduce al minimo las señales al mercado sobre la oferta y demanda de divisas en el mercado

## Bibliografía

- Avramidi, I. (2002). Heat Kernel in Quantum Field Theory, Nuclear Physics. Proc. Suppl, 104 pp. 3-32.
- Avramidi, I. (2007). Analytic and Geometric Methods for Heat Kernel Applications in Finance. Notes of New México Institute of Mining and Technology
- Derman, E., and I. Kani (1994). Riding on a smile, Risk 7, pp. 32-39
- De Jong, L. (2010). Option pricing with perturbation methods. January 2010, Thesis Delft University of Technology?. Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science Delft Institute of Applied Mathematics
- De, W. (1975). Quantum Field Theory in Curved space time, *Physics report*, 19(6).
- Dupire, B. (1994). Pricing with smile, RISK, 7, pp. 18-20
- Hagan, P., D. Kumar, and D. Woodward (2002). Managing Smile Risk, *Wilmott Magazine*, September, pp. 84-108
- Henry-Labordere, P. (2009). Analysis, Geometry, and Modeling in Finance. Chapman and Hall
- Heston, S., and W. Loewentein (1993). Options with Stochastic Volatilities with Applcattions to Bond and Currency Options, *Review of Financial Studies*, 6, pp. 327-343
- Hull and White, (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *The Journal volatilities*
- Galan, M., J. Duclaudand, and A. Garcia (1996). Una estrategia de acumulación de reservas mediante opciones de venta de dólares: El caso de México. *Documento de trabajo del Banco de México*

Gatheral, J. (2006). The volatility surface, John Wiley & Sons, Inc.  
 Mexder "Boletín diario de Transacciones de mercado del mercado de opciones" [http://www.-mexder.com.mx/MEX/Boletín Diario.html](http://www.-mexder.com.mx/MEX/Boletín%20Diario.html)  
 Rebonato, R., K. McKay, and A. White (2009). The SABR/LIBOR market model. A. Wiley  
 Werner, A, and A. Milo (1998). Acumulación de reservas internacionales a través de la venta de opciones: El caso de México, Documento de trabajo del Banco de México  
 West G. (2005). Model in Illiquid Markets, *Applied Mathematical Finance*, 12(4). pp. 371-385

### Apéndice I

#### Nociones de Geometría Diferencial

El campo natural donde se puede planear y resolver el modelo SABR es la geometría diferencial, a continuación se presentan algunos conceptos básicos antes de proceder a la deducción de la expresión de la opción y la volatilidad.

Un tensor del tipo  $(r, p)$  es un objeto multilineal el cual mapea  $r$  elementos de  $T_{X_0} * M$  y  $p$  elementos de  $T_{X_0}M$  a un número real. El conjunto de tensores de tipo  $(r, p)$  forman un espacio vectorial denotado por  $T_{X_0}^{(r,p)}M$ . Un elemento  $T$  de  $T_{X_0}^{(r,p)}M$  escrito en la base  $\{\frac{\partial}{\partial X^i}\}$  y  $\{dX^i\}$   $i$  como

$$T = T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial X_{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial X_{i_r}} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_p} \quad (1)$$

Utilizando otro sistema de coordenadas  $X_i$ , los componentes se transforman como:

$$T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_r} = T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial X^{i_1}}{\partial X_{i_1}} \dots \frac{\partial X^{i_r}}{\partial X_{i_r}} \frac{\partial X^{j_1}}{\partial X^{j_1}} \dots \frac{\partial X^{j_p}}{\partial X^{j_p}} \quad (2)$$

La métrica  $g_{ij}(x)$  es un tensor métrico no degenerado y diferenciable que permite medir distancias infinitamente cercanas a  $p$  con coordenadas  $x_i$  y  $p + dp$  con coordenadas  $x^i + dx^i$

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (3)$$

Deducimos que bajo un cambio de coordenadas, la métrica es invariante pero para cambios contrarios en la forma contravariante tenemos

$$g_j(x) = g_{ij}(x) \frac{\partial x^i}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^j} \quad (4)$$

un campo con una métrica es un campo Riemanniano y además la métrica puede verse como un objeto matemático para subir y bajar índices de tensores

$$X^i = g^{ij} X_j \quad (5)$$

$$X_i = g_{ij} X^j \quad (6)$$

La idea para medir la longitud es dividir la curva en pequeñas piezas infinitesimales cuyo cuadrado de longitud estaría dado por la ecuación (16). Además supongamos  $C : [0, 1] \rightarrow M$  es una curva diferenciable (parametrizada

por  $x^i(t)$  uniendo los puntos  $x(0) = 0$  y  $x(1) = y$ , la longitud  $l(C)$  es definida por

$$l(C) = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \quad (7)$$

dada una curva sobre un campo de Riemann  $M$ , se puede definir el transporte paralelo de un vector, tangente a la curva  $C$ , a lo largo de esta curva será llamada curva geodésica y su ecuación como ecuación geodésica, la condición puede escribirse como:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (8)$$

donde  $\Gamma_{jk}^i$  es llamado símbolo de Christoffel y depende de la métrica y la primera derivada respecto al tensor métrico

$$\Gamma_{ij}^p = \frac{1}{2} g^{pk} (-\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} + \partial_i g_{jk}) \quad (9)$$

En un campo Riemanniano, las curvas que minimizan la longitud en campo entre  $x(0)$  y  $x(1) = y$  son llamadas curvas geodésicas

$$\min_C \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^j(t)}{dt}} dt \quad (10)$$

A partir de la ecuación de Euler-Lagrange dado los puntos críticos de la funcional se puede obtener la ecuación geodésica. El tensor Riemann mide la diferencia en el transporte paralelo de un vector en un paralelogramo infinitesimal y esto mide la curvatura en un paralelogramo. El tensor de Riemann que da información sobre la curvatura

$$R_{jkl}^i = -\partial_l \Gamma_{kj}^i + \partial_k \Gamma_{lj}^i + \Gamma_{kr}^i \Gamma_{lj}^r - \Gamma_{lr}^i \Gamma_{kj}^r \quad (11)$$

de (11) es un tensor que se puede contraer y obtener el tensor de Ricci

$$R_{jl} = R_{jil}^i \quad (12)$$

y el escalar de curvatura

$$R = g^{ij} R_{ij} \quad (13)$$

**Apéndice II**

La expansión heat kernel y la formula asintótica para la densidad de probabilidad a primer orden con una métrica  $g$  sobre una superficie de Riemann y una conexión Abeliana  $A$  and sección  $Q$

$$p(\tau, x \parallel y) = \frac{\sqrt{g(y)}}{(4\pi\tau)} \sqrt{\langle y, x \rangle} \mathcal{P}(y, x) e^{-\frac{d^2(x,y)}{4\tau}} (1 + a_1(y, x)\tau)$$

La estimación de la expresión asintótica para la volatilidad implícita involucra dos pasos. El primero consiste de calcular la función  $LV\sigma(T, f)$  asociada a SVM, en el segundo paso se deduce la volatilidad implícita de la volatilidad local

$$\sigma(T, f)^2 = C(f)^2 E^{PT} [a_T^2! f_T = f] = f^2 \sigma_{loc}(T, f)^2$$

el valor medio del cuadrado de la  $SV$  cuando la tasa forward es fija es el  $LV$  y la definición del valor medio, la expresión asintótica para la probabilidad condicional

$$\sigma(T, f)^2 = \frac{\int_0^\infty f(T, a) e^{\in \phi(a)} da}{\int_0^\infty h(t, a) e^{\in \phi(a)} da}$$

con

$$\phi(a) = d^2(x, y),$$

$$\begin{aligned} h(T, a) &= \sqrt{g} \sqrt{\Delta(x, y)} \mathcal{P}(y, x) (1 + a_1(y, x)T), f(T, a) \\ &= 2h(t, a) g^{ff} \text{ and } \in = -\frac{1}{4T} \end{aligned}$$

A orden cero,  $\sigma^2$  esta dado por  $\sigma(0, f)^2 = 2g^{ff}(a_{min})$  con  $a_{min}$  la volatilidad estocástica que minimiza la distancia geodésica en la superficie Riemanniana

$$a_{min} \equiv a! \min_a \phi(a)$$

se encuentra la expresión siguiente para el numerador

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(T, a) e^{\in \phi(a)} da &= \sqrt{\frac{2\pi}{-\in \phi''(a_{min})}} f(T, a_{min}) e^{\in \phi(a_{min})} \\ &\left( 1 + \frac{1}{\in} \left( -\frac{f''(0, a_{min})}{2f(0, a_{min}) \phi''(a_{min})} \right) \right. \\ &\left. + \frac{\phi^4(a_{min})}{8\phi'(a_{min})^2} + \frac{f'(0, a_{min}) \phi''(a_{min})}{2f''(0, a_{min}) \phi'(a_{min})^2} - \frac{5(\phi''(a_{min}))^2}{24(\phi''(a_{min}))^3} \right) \end{aligned}$$

$$\sigma(T, f)^2 = 2g^{ff}(a_{min})$$

$$\left( 1 + \frac{1}{\in} \left( -\frac{1}{2\phi''(a_{min})} \left( \frac{f''(a_{min})}{f(a_{min})} - \frac{h''(a_{min})}{h(a_{min})} \right) + \frac{\phi''(a_{min})}{2\phi'(a_{min})^2} \left( \frac{f(a_{min})}{f(a_{min})} - \frac{h''(a_{min})}{h(a_{min})} \right) \right) \right)$$

Pegando la expresión para  $f$  y  $g$ , finalmente se obtiene

$$\sigma(T, f) = \sqrt{2g^{ff}(a_{min})} \left( 1 + \frac{T}{\phi''(a_{min})} \left( \frac{g^{ff}(a_{min})}{g^{ff}(a_{min})} (\ln(g\mathcal{P}^2)(a_{min}) - \frac{\phi''(a_{min})}{\phi'(a_{min})}) + \frac{g^{ff'}(a_{min})}{g^{ff}(a_{min})} \right) \right)$$

La última expresión depende sólo de la métrica y la conexión  $A$  y no de los primeros coeficientes  $a_1(y, x)$ . El paso final es usar la relación asintótica entre volatilidad local e implícita que se han obtenido de la expansión heat kernel expansión en el tiempo sobre una dimensión de tiempo

$$\lim_{T \rightarrow 0} \sigma_{BS}(T, K) = \frac{\log\left(\frac{K}{f_0}\right)}{\int_{f_0}^K \frac{df}{C(f)}}$$

$$\sigma_{BS}(K, T) = \frac{\ln\left(\frac{K}{f_0}\right)}{\int_{f_0}^K \frac{df}{C(f)}} \left( 1 + \frac{T}{3} \left( \frac{1}{8} \left( \frac{\log\left(\frac{K}{f_0}\right)}{\int_{f_0}^K \frac{df}{C(f)}} \right)^2 \right) + Q(f_{av}) + \frac{3\mathcal{G}(f_{av})}{4} \right)$$

Que puede aproximarse

$$\sigma_{BS}(K, T) = \frac{\ln\left(\frac{K}{f_0}\right)}{\int_{f_0}^K \frac{df}{C(f)}} \left( 1 + \frac{C^2(f_{av})T}{24} \left( 2\frac{C(f_{av})}{C(f_{av})} - \left( \frac{C(f_{av})}{C(f_{av})} \right)^2 + \frac{1}{f_{av}^2} \right) + T \frac{\partial_t C(0, f_{av})}{2C(f_{av})} \right)$$

Apéndice III Tabla II-1

vencimiento	19 09 2011			
precio Strike $K$	12	12.5	13	13.5
tasa forward ( $f$ )	12.52	12.52	12.52	12.52
beta	1	1	1	1
sigma0	0.175	0.175	0.175	0.175
rho	-1	-1	-1	-1
niu	0.5	0.5	0.5	0.5
vencimiento ( $T$ )	0.0611111111	0.0611111111	0.0611111111	0.0611111111

vencimiento	19 12 2011			
precio Strike $K$	12	12.5	13	13.5
tasa forward ( $f$ )	12.6	12.6	12.6	12.6
beta	1	1	1	1
sigma0	0.205	0.205	0.205	0.205
rho	-1	-1	-1	-1
niu	0.9	0.9	0.9	0.9
vencimiento( $T$ )	0.313888889	0.313888889	0.313888889	0.313888889

vencimiento	16 03 2011			
precio strike $K$	12	12.5	13	13.5
tasa forward ( $f$ )	12.6623	12.6623	12.6623	12.6623
beta	1	1	1	1
sigma0	0.205	0.205	0.205	0.205
rho	-1	-1	-1	-1
niu	0.9	0.9	0.9	0.9
vencimiento ( $T$ )	0.5583	0.55833	0.55833	0.55833

vencimiento	18 06 2012			
precio strike $K$	12	12.5	13	13.5
tasa forward ( $f$ )	12.7	12.7	12.7	12.7
beta	1	1	1	1
sigma0	0.205	0.205	0.205	0.205
rho	-1	-1	-1	-1
niu	0.9	0.9	0.9	0.9
vencimiento ( $T$ )	0.8194	0.8194	0.8194	0.8194